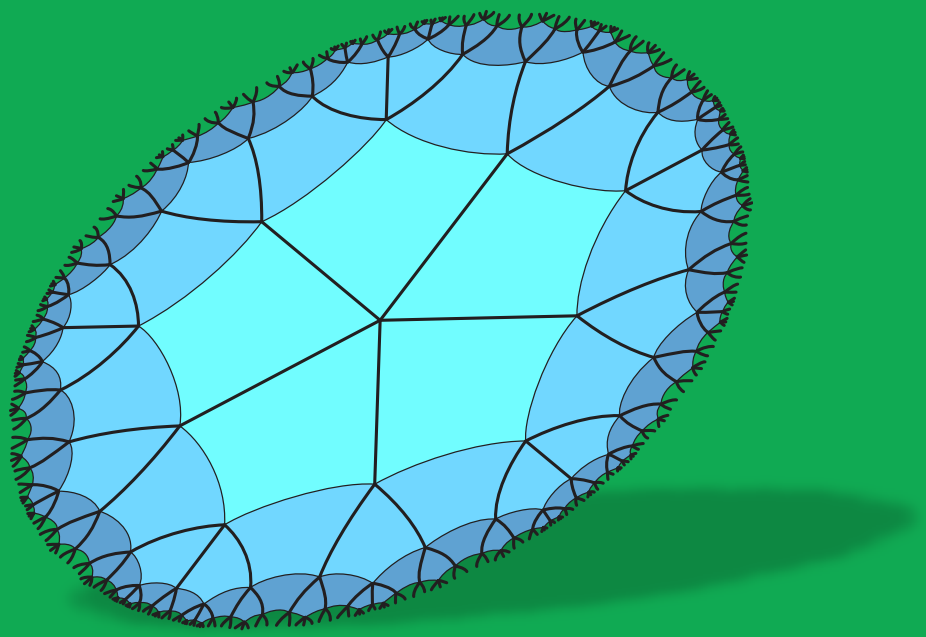
Dimenziók

Matematikai Közlemények

IV. kötet



NymE EMK Matematikai Intézet
Soproni Tudós Társaság
2016

Dimenziók

Matematikai Közlemények

IV. kötet

NymE EMK Matematikai Intézet

Soproni Tudós Társaság

2016

Szerkesztők:

Dr. Németh László
egyetemi docens

Dr. Szalay László
intézetigazgató egyetemi tanár

Dr. Závoti József
egyetemi tanár

Nyugat-magyarországi Egyetem
Erdőmérnöki Kar
Matematikai Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky út 4.

MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

Kiadja: NymE EMK Matematikai Intézet és Soproni Tudós Társaság

HU ISSN 2064-2172

Tartalomjegyzék

Uniform Distribution Theory Conference 3

On Friedrichs-Velte and related constants of the union of overlapping domains.....5

Gömbközelítések poliéderekkel.....13

Automatikus kiértékelő program ionogramok értelmezéséhez.....23

A Kepler-féle egyenlet és az affin transzformációk 29

Időjárási légnyomásváltozás regressziós analízise 37

A síkbeli projektív transzformáció matematikai modelljei.....43

Többváltozós lineáris regresszió a gyakorlatban 49

Lehűlési folyamat vizsgálata középiskolai módszerekkel 55

Uniform Distribution Theory Conference
2016. július 5-9.

Szalay László
NymE EMK, Matematikai Intézet

A Uniform Distribution Theory Conference kétévenként kerül megrendezésre. Marseille-Luminy (Franciaország, 2008), Strobl (Ausztria, 2010), Smolenice (Szlovákia, 2012), és Ostravice (Csehország, 2014) után 2016-ban Sopron volt a házigazdája. Az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézete, a Debreceni Egyetem, az Eötvös Loránd Tudományegyetem, A Bolyai János Matematikai Társulat, a NymE Erdőmérnöki Kara, és a Soproni Tudós Társaság által támogatott, és a NymE Matematikai Intézete által megszervezett konferenciának mintegy 70 résztvevője volt 12 országból. A pénzügyek szakszerű lebonyolítását az Universitas Fidelissima Kft. végezte, ezúttal szeretnék a konferencia szervezésében résztvevő kollégáiknak köszönetet mondani az önzetlen munkájukért.

A konferencia sorozat célja, hogy fórumot biztosítson a valószínűségi számelmélettel kapcsolatos tudományos kutatások legújabb eredményeinek megvitatására, lehetőséget adjon információcserére. Alapvetően az alábbi kutatási területek fókuszál: *Distribution of one dimensional and multidimensional sequences. Effective constructions of (t,m,s)-nets and (t,s)-*

digital sequences. Hybrid sequences. Special sequences and discrepancies. Sequences involving primes and number-theoretic functions. Block sequences. Sum-of-digits sequences. Normal numbers. Abstract van der Corput sequences and Hammersley sequences. Distribution of binary sequences, well-distribution measure and correlation measure of pseudorandomness. Distribution of integer sequences. Theory of densities (asymptotic, logarithmic, uniform, weighted, etc.) Random and pseudo-random number generators. Congruential generators. Explicit inverse pseudorandom generators. Tests for pseudo-randomness. Quasi-Monte Carlo integration in Hilbert space with a kernel. Fourier-Walsh analysis. Theory of distribution functions of sequences. Distribution functions of ratio sequences. Copulas. Uniform distribution preserving mappings. Distribution of integer points in large domains. Dynamics emerging from sequences. Number theoretic ciphers and codes. Combinatorial number theory. Trigonometric sums. Diophantine approximations and Diophantine equations. Continued fraction expansions.

A konferencia tudományos programja mellett, konferenciakirándulás keretében lehetőség nyílt megismerkedni a 2001-ben világörökség részévé nyilvánított Fertő kultúrtáj jellegzetességeivel. A konferencia bankett kiváló lehetőséget biztosított a résztvevők számára a kötetlen beszélgetésre. Végezetül szeretném megköszönni Radasics Beáta, Hajdu Gréta, Hatos Viktória, Orbán Dezső, Dr. Németh László, Németh Eszter, Németh Rita, Virág Szabolcs és Gueth Krisztián munkáját.

Dr. Szalay László intézetigazgató, NymE EMK, Matematikai Intézet

On Friedrichs-Velte and related constants of the union of overlapping domains

Sándor Zsuppán
Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
zsuppans@gmail.com

ÖSSZEFOGLALÓ. Átfedő síkbeli és térbeli tartományok egyesítésének Friedrichs-Velte konstansára adunk felső becslést a résztartományok megfelelő konstansai és mérete segítségével. Az eredményt összehasonlítjuk már ismert, a Babuška-Aziz és Korn konstansokra vonatkozó hasonló felső becslésekkel.

ABSTRACT. An upper estimation for the Friedrichs-Velte and related constants of the union of overlapping planar and spatial domains is given in terms of the constants and sizes of the parts and of the size of their intersection. The estimation is compared to similar results for the same and for the related Babuška-Aziz and Korn constants.

1. Introduction

Motivated by problems in planar linear elasticity Friedrichs [7] introduced an inequality between the norms of two square integrable conjugate harmonic functions defined on a plane domain provided one of the functions fulfils a certain side condition and the boundary of the problem domain is piecewise smooth. His inequality and the domain specific optimal constant figuring therein are connected with some other important inequalities and corresponding constants such as the Babuška-Aziz inequality for the divergence equation, the inf-sup condition in the context of Navier-Stokes flows and for some smooth classes of domains also Korn's second inequality in linear elasticity, [2,3,9]. Friedrichs inequality remains valid for more general domains and it was generalized for other spaces of harmonic functions, [2,6,12].

In [15] Velte proved two analogous inequalities for three-dimensional simply connected domains having certain boundary regularity. He also investigated the connection of these inequalities and of the corresponding optimal constants with the Babuška-Aziz inequality, with the inf-sup condition and with the Cosserat spectrum of the domain.

For the numerical utilization of the constants we refer to [10, 13, 14].

Despite of their importance exact values of all these constants are known in a very few cases. A useful upper estimation of Friedrichs constant for the class of star-shaped planar domains given first in [9] has been revised recently in [2,3]. Reference [11] contains an analogous upper estimation for the Velte constant of a spatial star-shaped domain.

The aim of the present paper is to give an upper estimation for the Friedrichs and Velte constants of the union of two overlapping domains. The estimation is derived essentially in the same way for two and three-dimensional domains as well. It was motivated by similar estimations for the related Babuška-Aziz and Korn constants.

In Section 2 we explain the notation and we recall some preliminary results concerning the Friedrichs-Velte and related constants.

In Section 3 we derive the main result and compare it to corresponding known ones from [2, 5, 8, 10,11].

2. Friedrichs-Velte and related constants

Let Ω be a bounded planar or spatial domain the boundary $\partial\Omega$ of which will be further specified below. We denote by $|\Omega|$ the size of Ω which means the area for plane domains and the volume for spatial domains. Let $L_2(\Omega)$ be the usual Hilbert space of square integrable functions over Ω. For $f, g \in L_2(\Omega)$ we denote by $\langle f, g\rangle_{0,\Omega} = \int_\Omega fg$ their inner product, and by $\|f\|_{0,\Omega}$ the norm of f. The integral mean of f over Ω is $\langle f\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\langle 1, f\rangle_{0,\Omega}$. For vector valued functions $f, g \in L_2(\Omega)^n$ we use the inner product $\langle f, g\rangle_{0,\Omega} = \int_\Omega \sum_{k=1}^n f_k g_k$ and the respective norm.

The Friedrichs inequality reads in the notation of the present paper as follows.

Proposition 2.1 (Shapiro, [11]) Let Ω be a bounded plane domain satisfying an interior cone condition and let $w_0 \in \Omega$. Let u and v be arbitrary square integrable conjugate harmonic functions on Ω. Then, for some finite positive constants $\Gamma(\Omega)$ and $\Gamma(\Omega, w_0)$, which do not depend on u and v Friedrichs inequality holds in either of the forms

$$\|u\|^2_{0,\Omega} \le \Gamma(\Omega)\|v\|^2_{0,\Omega} \text{ provided } \langle u\rangle_\Omega = 0 \text{ or} \tag{1}$$

$$\|u\|^2_{0,\Omega} \le \Gamma(\Omega, w_0)\|v\|^2_{0,\Omega} \text{ provided } u(w_0) = 0. \tag{2}$$

According to [2] Friedrichs inequality remains valid for the larger class of planar John domains.

The optimal constant $\Gamma(\Omega)$, called Friedrichs constant of the plane domain Ω, is the least positive number such that the inequality (1) is fulfilled for all pairs of conjugate harmonic functions u and v. The exact value of $\Gamma(\Omega)$ depends only on the shape of Ω but does not depend on its size. $\Gamma(\Omega, w_0)$, called Friedrichs constant with respect to the point w_0, depends additionally on the interior point w_0. We have

$$1 \le \Gamma(\Omega) \le \Gamma(\Omega, w_0) \le \frac{|\Omega|}{|D(w_0, r)|}\Gamma(\Omega). \tag{3}$$

where $D(w_0, r)$ denotes any disc centered in $w_0$with radius r contained in the interior of Ω, see [16].

In order to formulate a three-dimensional analogy of Friedrichs inequality Velte [15] considers harmonic functions u and $v = (v_1, v_2, v_3)$ of three variables conjugate in the sense of the Moisil-Teodorescu equations

$$\operatorname{rot} v = -\nabla u \text{ and } \operatorname{div} v = 0. \tag{4}$$

Using these notations, the Velte inequalities are the following.

Proposition 2.2 (Velte, [14]) Let Ω be a bounded simply-connected spatial domain with C^2 boundary. Then there are constants $\Gamma(\Omega) \ge 1$ and $\tilde{\Gamma}(\Omega) \ge 1$ depending only on the shape of Ω such that for any pair u and v conjugate in the sense of (4) the inequalities

$$\|u\|^2_{0,\Omega} \le \Gamma(\Omega)\|v\|^2_{0,\Omega} \text{ provided } \langle u\rangle_\Omega = 0 \text{ and} \tag{5}$$

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq \tilde{\Gamma}(\Omega)\|u\|_{0,\Omega}^2 \text{ provided } v \cdot n = 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{6}$$

hold, where n denotes the outer unit normal to $\partial\Omega$. ■

The optimal constant $\Gamma(\Omega)$, called Velte constant of the spatial domain Ω, is the least positive number such that the inequality (5) is fulfilled for all pairs of conjugate harmonic functions u and v.

Obviously, there is an analogy between (1) in the planar case and (5) in the spatial case involving not only the inequalities but also the corresponding normalizations. Indeed, if we set the first two coordinates of the vector function v in (4) zero and if we let the third coordinate v_3 depend only on x_1 and x_2, then (4) reduce to the Cauchy-Riemann equations between the harmonic functions u and $-v_3$ and (5) reduces to (1).

Justified by this analogy we denote in this paper by $\Gamma(\Omega)$ both Friedrichs and Velte constants and refer to them as Friedrichs-Velte constants.

In [4] inequalities for conjugate harmonic differential forms are examined, which contain the Friedrichs and Velte inequalities as special cases.

Also in [4] the author derives also a correspondence between the Friedrichs-Velte constant and the Babuška-Aziz constant $C(\Omega)$ figuring in the Babuška-Aziz inequality, which guaranties the stable solvability of the divergence equation $\operatorname{div} u = q$ for $q \in L_2(\Omega)$ with $\langle q \rangle_\Omega = 0$ in the Sobolev space $H_0^1(\Omega)^n$ of vector functions with square integrable gradient over Ω and zero trace on the boundary, i.e. we have $|u|_{1,\Omega} \leq C\|q\|_{0,\Omega}$ for the solution u with some positive finite constant C depending not u, where $|u|_{1,\Omega} = \|\operatorname{grad} u\|_{0,\Omega}$. The Babuška-Aziz constant $C(\Omega)$ of the domain Ω is the least possible of the above constants, c.f [1,2,4].

Proposition 2.3 (Costabel, [2,4]) For any bounded open set Ω the Babuška-Aziz constant $C(\Omega)$ is finite iff the Friedrichs-Velte constant $\Gamma(\Omega)$ is finite, and there holds

$$C(\Omega) = \Gamma(\Omega) + 1. \tag{7}$$

Both constants are further related to other important domain specific constants, such as the inf-sup constant $\beta(\Omega)$ and the Cosserat constant $\sigma(\Omega)$:

$$\Gamma(\Omega) + 1 = C(\Omega) = \frac{1}{\sigma(\Omega)} = \frac{1}{\beta^2(\Omega)}, \tag{8}$$

and if the boundary of the domain is smooth enough to the Korn constant $K(\Omega)$ of the domain $K(\Omega) = 2C(\Omega)$, c.f. [1,2].

3. Main result

3.1. Estimations

Despite of their importance exact values of the Friedrichs-Velte constants are known only for a few domains. Such examples are the disc, the ellipse, some domains obtainable as conformal maps of the unit disc in the plane [17,18] and the sphere in three dimensions. However there are useful upper estimations for star-shaped domains, see [2,3,9] for planar and [11] for spatial domains. In order to obtain estimations for the examined constants of other than star-shaped domains, one can consider unions of (star-shaped) domains and derive estimations for the constants of these unions in terms of the constants of the parts, see [8]. In this section we develop such an estimate for the Friedrichs-Velte constant of the overlapping union of two arbitrary planar or spatial domains, and compare it to other existing ones for the

Babuška-Aziz and Korn constants. In order to simplify the notation we denote the norm $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ in this section by $\|\cdot\|$. First we need the following

Lemma 3.1 Let Ω denote a bounded planar or spatial domain, and let A be a subdomain of Ω such that $|A| > 0$. If $\langle f\rangle_{\mathrm{A}} = 0$ for $f \in L_2(\Omega)$, then there follows

$$\|f - \langle f\rangle_\Omega\|^2 \le \|f\|^2 \le \frac{|\Omega|}{|A|}\|f - \langle f\rangle_\Omega\|^2. \tag{9}$$

PROOF. One easily verifies the equality

$$\|f\|^2 = \|f - \langle f\rangle_\Omega\|^2 + |\Omega|\langle f\rangle_\Omega^2. \tag{10}$$

Omitting the nonnegative term on the right-hand side of (10) yields the left-hand side inequality. Next we use $\langle f\rangle_{\mathrm{A}} = 0$ and estimate by the Cauchy-Schwarz inequality:

$$\left(\int_\Omega f\right)^2 = \left(\int_{\Omega\setminus A} f\right)^2 \le |\Omega \setminus A| \cdot \int_{\Omega\setminus A} f^2 \le (|\Omega| - |A|) \cdot \int_\Omega f^2 \tag{11}$$

Substituting this into (10) and rearranging gives

$$\frac{|A|}{|\Omega|}\|f\|^2 \le \|f - \langle f\rangle_\Omega\|^2 \tag{12}$$

which is equivalent to the right-hand side inequality in (9). Equality occurs here if we set $f = 1 - \chi_A$, where χ_A means the characteristic function of the subdomain A. ■

The left-hand side of (9) was implicitly already utilized in [7] and [9] in the planar case and in [11] in the spatial case.

Lemma 3.1 makes it possible to change the normalization $\langle u\rangle_\Omega = 0$ in (5) to $\langle u\rangle_A = 0$ for some subdomain $A \subseteq \Omega$ in order to obtain a modified version of the Friedrichs-Velte inequalities.

Lemma 3.2 Let Ω be a bounded planar or spatial domain and let A be a subdomain of Ω such that $|A| > 0$. If the Friedrichs-Velte inequality holds on Ω with the Friedrichs-Velte constant $\Gamma(\Omega)$, then there is a constant $\Gamma(\Omega, A)$ depending only on the domain Ω and its subdomain A such that the Friedrichs-Velte inequality holds for conjugate harmonic functions satisfying the normalization $\langle u\rangle_A = 0$ instead of $\langle u\rangle_\Omega = 0$. Moreover, the optimal constants $\Gamma(\Omega)$ and $\Gamma(\Omega, A)$ are connected by

$$\Gamma(\Omega) \le \Gamma(\Omega, A) \le \frac{|\Omega|}{|A|}\Gamma(\Omega). \tag{13}$$

PROOF. Substitute the result of Lemma 3.1 into the Friedrichs-Velte inequality. ■

Remark. The Friedrichs-Velte constants $\Gamma(\Omega, A)$ of the domain with respect to a subdomain can be seen as a generalization of the Friedrichs-Velte constants $\Gamma(\Omega, w_0)$ with respect to an interior point.

The main result of this paper is the following

Theorem 3.3 Let be $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ and $\Omega_s = \Omega_1 \cap \Omega_2$ such that $|\Omega_s| > 0$. If the Friedrichs-Velte inequality holds for either of the domains Ω_1 and Ω_2, then it holds also for their union Ω and there also follows

$$\Gamma(\Omega) \le \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_s|}\Gamma(\Omega_1) + \frac{|\Omega_2|}{|\Omega_s|}\Gamma(\Omega_2). \tag{14}$$

PROOF. We give the proof in the spatial case, but it is practically the same in the planar case. Let the conjugate pair $u, v \in L_2(\Omega)$ be such that $\langle u \rangle_{\Omega_s} = 0$.

$$\frac{\|u\|^2}{\|v\|^2} = \frac{\int_\Omega u^2}{\int_\Omega |v|^2} = \frac{\int_{\Omega_1} u^2 + \int_{\Omega_2} u^2 - \int_{\Omega_s} u^2}{\int_\Omega |v|^2} \leq \frac{\int_{\Omega_1} u^2}{\int_{\Omega_1} |v|^2} + \frac{\int_{\Omega_2} u^2}{\int_{\Omega_2} |v|^2} \tag{15}$$

By Lemma 3.2 there follows

$$\frac{\|u\|^2}{\|v\|^2} \leq \Gamma(\Omega_1, \Omega_s) + \Gamma(\Omega_2, \Omega_s) \tag{16}$$

which implies

$$\Gamma(\Omega, \Omega_s) \leq \Gamma(\Omega_1, \Omega_s) + \Gamma(\Omega_2, \Omega_s). \tag{17}$$

The estimation (14) immediatly follows by using the inequality (13). ■

Example 3.4 Theorem 3.3 can be utilized to obtain upper estimates for Friedrichs-Velte constants of more general domains using some known upper bounds for simpler ones. To exemplify this let Ω_1 be an L-shaped domain which is the union of two rectangles with sides 1 and $L + 1$ ($L > 1$) which intersect in a square with sidelength 1. The domain Ω_1 is star-shaped and the estimation from [2] yields $\Gamma(\Omega_1) \leq \left(L + \frac{1}{2} + \sqrt{L^2 + L + \frac{1}{2}} \right)^2$. Let Ω_2 be congruent to Ω_1 and set $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ such that $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ is a rectangle with sides 1 and $L + 1$. For the domain Ω, which is not star-shaped, Theorem 3.3 gives the upper estimation $\Gamma(\Omega) \leq \left(4 - \frac{2}{L+1}\right) \Gamma(\Omega_1)$ which differs from that for $\Gamma(\Omega_1)$ only by a factor at most 4. ■

3.2. Comparison

In this section we compare the main result to existing ones for the related constants in the case of planar and spatial domains as well.

First we consider Theorem 3.1 in [8] for the Babuška-Aziz constant of the union of finitely many overlapping star-shaped domains. A direct comparison is impossible because this result does not contain the exact Babuška-Aziz constants of the subdomains but only an upper estimation of their value. In order to overcome this difficulty we follow the proof of Theorem 3.1 in [8] for the case of the union of two overlapping domains and reformulate it with keeping the Babuška-Aziz constants of the subdomains in the resulting formula. We achieve the following

Proposition 3.5 Let be $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ and $\Omega_s = \Omega_1 \cap \Omega_2$ such that $|\Omega_s| > 0$. If the Babuška-Aziz inequality holds for either of the domains Ω_1 and Ω_2, then it holds also for their union Ω and there also follows

$$C(\Omega) \leq \max_{j=1,2} \left\{ \frac{|\Omega_j|}{|\Omega_s|} C(\Omega_j) \right\}. \tag{18}$$

We utilize Corollary 3.5 only as a comparison to the main Theorem 3.3, however, it could be of interest on its own.

To this end we substitute (7) into (18) and we obtain

$$\Gamma(\Omega) \leq \max_{j=1,2} \left\{ \frac{|\Omega_j|}{|\Omega_s|} \Gamma(\Omega_j) + \frac{|\Omega_j \setminus \Omega_s|}{|\Omega_s|} \right\}. \tag{19}$$

This shows that (14) gives a better upper estimation for $\Gamma(\Omega)$ than (19) if $|\Omega_1 \setminus \Omega_s| > |\Omega_2|$ and $\Gamma(\Omega_2) \leq \frac{|\Omega_1 \setminus \Omega_s|}{|\Omega_2|}$.

Another possibility for comparison gives an analoguos result from [10] for the related Korn constant $K(\Omega)$ in the case of smoothly bounded planar simply-connected domains. It reads

$$K(\Omega) \leq \max_{j=1,2} \left\{ K(\Omega_j) + \frac{|\Omega_j|}{|\Omega_s|} \left(\sqrt{K(\Omega_1)} + \sqrt{K(\Omega_2)} \right)^2 \right\} \tag{20}$$

and it is an improved version of a similar result from [5]. Substituting $K(\Omega) = 2 + 2\Gamma(\Omega)$ into the estimation (14) we obtain

$$K(\Omega) \leq \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_s|} K(\Omega_1) + \frac{|\Omega_2|}{|\Omega_s|} K(\Omega_2) - \frac{2|\Omega|}{|\Omega_s|} \tag{21}$$

which is equivalent with the main result (14) and on the other hand it can be compared to (20). For the sake of simplicity suppose that the plane domain Ω_1 is similar to Ω_2 and let be $|\Omega_1| \leq |\Omega_2|$. In this case we have $K(\Omega_1) = K(\Omega_2)$ and the minimum in (20) is attained for $j = 1$:

$$K(\Omega) \leq K(\Omega_1) + \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_s|} \left(\sqrt{K(\Omega_1)} + \sqrt{K(\Omega_2)} \right)^2. \tag{22}$$

If $|\Omega| \leq 4|\Omega_1|$or if $4|\Omega_1| < |\Omega| \leq 8|\Omega_1|$ and $K(\Omega_1) \leq \frac{2|\Omega|}{|\Omega| - 4|\Omega_1|}$, then (21) constitutes a better upper estimation than (22). If $|\Omega| > 8|\Omega_1|$, then (22) is definitely better than (21).

Finally we compare Theorem 3.3 to a direct upper estimation for the Velte constant derived in [11] for the class of three-dimensional star-shaped domains. We realize this comparison on an example, where the domain Ω is the union of two overlapping unit spheres, which is star-shaped for example with respect to the center of the line segment connecting the centers of the spheres. The evaluation of the estimation from [11] yields

$$\Gamma(\Omega) \leq \frac{2}{9} \left(\frac{2+d}{2-d} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{d}{\sqrt{4-d^2}} + \sqrt{9 + \frac{9d}{\sqrt{4-d^2}} + \frac{d^2}{4-d^2}} \right)^2, \tag{23}$$

where $0 < d < 2$ denotes the distance of the centers of the spheres. Theorem 3.3 can also be utilized in this case to obtain the upper estimation

$$\Gamma(\Omega) \leq \frac{64}{(2-d)^2(4+d)}, \tag{24}$$

where we have also used that the Velte constant of a sphere equals 2, see [15]. A numerical comparison shows that (24) gives a better upper estimation than (23) if $0{,}5012\ldots < d < 2$. An even better upper estimation than (24) gives (19) for every $0 < d < 2$.

4. Concluding remarks

In this paper the Friedrichs-Velte and related constants of the union of overlapping domains were investigated. These domain specific constants are especially of interest since they are involved in many problems in fluid dynamics and in elasticity theory but their exact value is known only for a few types of domains. The main result is an upper estimation of the Friedrichs-Velte constant of the union of two overlapping domains in terms of the constants and sizes of the parts and of the size of their intersection. It can be utilized to obtain useful estimations for the discussed constants of more complicated domains using the exact values or upper estimations of the simpler subdomains. It is compared to existing estimations for the related Babuška-Aziz and Korn constant. In order to make this comparison possible we

developed a new upper estimation for the Babuška-Aziz constant of the union of two overlapping domains based on an existing construction from [8]. A detailed comparison shows that the main result is comparable to existing related ones: it yields occasionally a better upper estimation but it is not definitely better in all cases.

References

[1] **Babuška I., Aziz A.K.**, Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method, in The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972), Academic Press, New York, 1972, pp. 1–359.

[2] **Costabel M., Dauge M.**, On the inequalities of Babuška-Aziz, Friedrichs and Horgan-Payne, Arch. Rational Mech. and Anal. 217 (2015) No 3, 873-898.

[3] **Dauge M., Bernardi C., Costabel M., Girault V.**, On Friedrichs constant and Horgan-Payne angle for LBB condition, Monografiás Matemáticas García de Galdeano 39, 87-100 (2014).

[4] **Costabel M.**: Inequalities of Babuška-Aziz and Friedrichs-Velte for differential forms, HAL: hal-01181963, arXiv:1507.08464 (2015).

[5] **Dafermos C. M.**, Some Remarks on Korn's Inequality. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik 19 (1968), 913-920.

[6] **Durán R.G., Muschietti M.A.**, The Korn inequality for Jones domains, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004 (2004), No. 127, 1-10.

[7] **Friedrichs K.**, On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. Trans. AMS 41 (1937), 321-364.

[8] **Galdi, G. P.**: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations: Linearized Steady Problems, Band 1., Springer-Verlag (1994).

[9] **Horgan C.O. and Payne L.E.**, On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz. Achive Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 165-179.

[10] **Kessler M.**, Die Ladyzhenskaya-Konstante in der numerischen Behandlung von Strömungsproblemen, Thesis, Bayerische Julius-Maximilians-Universität, Würzburg (2000).

[11] **Payne L.E.,** A bound for the optimal constant in an inequality of Ladyzhenskaya and Solonnikov, IMA Journal of Applied Mathematics 72 (2007), 563-569.

[12] **Shapiro H.S.**, On some Fourier and distribution-theoretic methods in approximation theory, in vol. Approximation Theory. III, Proc. Conf. held in Austin, Texas, 1980 (W.Cheney et. al., eds.), Academic Press, San Diego (1980), 87-124.

[13] **Stoyan G.**, Towards discrete Velte decompositions and narrow bounds for inf-sup constants, Computers & Maths. with Appls., 38, 7-8, (1999), 243-261.

[14] **Stoyan G.**, Iterative Stokes solvers in the harmonic Velte subspace, Computing 67 (2000), 13-33.

[15] **Velte W.**, On inequalities of Friedrichs and Babuška-Aziz in dimension three, Journal for Analysis and its Applications, Vol.17, No.4 (1998), 843-857.

[16] **Zsuppán S.**, On the domain dependence of the inf-sup and related constants via conformal mapping, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011), 856-863.

[17] **Zsuppán S.**, On the spectrum of the Schur complement of the Stokes operator via conformal mapping, Methods and Applications of Analysis, Vol.11, No.1 (2004), 133-154.

[18] **Zsuppan S.,** On the Stokes problem, Thesis, Eötvös Loránd Univ. Budapest, 2008.

Gömbközelítések poliéderekkel

Talata István
Szent István Egyetem,
Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest,
és Dunaújvárosi Egyetem, Dunaújváros
talata.istvan@ybl.szie.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Áttekintünk néhány módszert, melyekkel gömböt jól megközelítő poliéderek készíthetők el. Egyrészt bizonyos geodézikus poliédereket, másrészt ún. Goldberg-poliédereket állíthatunk így elő. Történetük, alkalmazásaik, és néhány, a geometria oktatásában hozzájuk kapcsolódó tapasztalat is bemutatásra kerül.

ABSTRACT. We review some methods to construct polyhedra approximating a sphere. On the one hand, some geodesic polyhedra, and on the other hand, some Goldberg polyhedra can be constructed this way. Their history, applications, and some experience in geometry education in connection with them are also presented.

1. Gömbközelítések geodézikus poliéderekkel

A geodézikus poliéderek olyan, csak háromszöglapokkal rendelkező poliéderek, amelyek egy gömböt közelítenek meg, és amelyeknek minél több csúcsuk van, a lapjaik annál kisebb átmérőjűek, ezért így alakjuk egy gömb egyre jobb közelítései. A geodézikus poliéderekre egy közkeletű (de nem túl precíz) elnevezés a geodézikus gömb, amely amiatt terjedhetett el, mert ezek a poliéderek gömbök közelítései. Geodézikus kupolán pedig olyan, csak háromszög-lapokból álló poliéderfelületet értünk, amely egy félgömb, vagy általánosabban egy gömbszelet gömbfelületi részét közelíti meg, tehát egy geodézikus poliéder sokszöglapjainak olyan részhalmazát, amely egy gömbfelület (síkkal történt) szelését közelíti meg.

A „geodézikus” szó a geodézikus poliéderek nevében arra utal, hogy egy ilyen poliéder egy gömböt közelít meg, melynek geodézikus (elterjedtebb magyar fordításban: geodetikus) vonalai a főkörök, míg az ilyen poliéderek élei főkörívek közelítései, és a csúcsok számának növelésével ahogy egy ilyen poliéder egyre jobban közelíti a gömböt, úgy adott hosszúságú főkörívek egyre több élből álló közelítéseként jelennek meg a geodézikus poliéder bizonyos éleinek sorozatai.

Ezt szemléletesen úgy is meg lehet fogalmazni, hogy ha a geodézikus poliéder által közelített gömb felületére rávetítjük a gömbközéppontból a poliéder élhálóját, akkor vonalak olyan, főkörívekből álló családját kapjuk a gömbfelületen, amelyben az egymást metsző főkörívek háromszögtartományokra osztják a gömbfelületet. A gömbfelület ilyen felosztását geodézikus rácsnak nevezik.

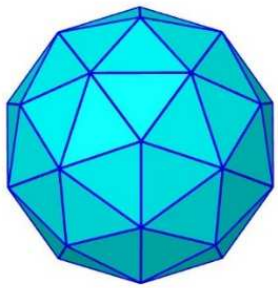
Egy n-edrendű geodézikus poliéder rekurzívan definiálható (tetszőleges $n \geq 1$ esetére), mint egy $(n-1)$-edrendű geodézikus poliéder háromszöglapokkal történő finomítása. A következőkben néhány eljárást mutatunk n-edrendű geodézikus poliéderek elkészítésére, és ezeket a poliédereket azonosítjuk határoló lapjaiknak $\mathcal{L}_n$ családjával.

Legyen c egy B gömb középpontja, és legyen H egy háromszöglap, $c \notin H$. $\pi(H)$ legyen az a háromszöglap, melynek csúcsai H csúcsainak a c pontból a B gömb felületére vetített képei. Ha $\mathcal{L}$ háromszögek egy családja, akkor legyen $\pi(\mathcal{L}) = \{\pi(H) | \, H \, \epsilon \, \mathcal{L}\}$. Tehát $\pi(\mathcal{L})$ háromszögek olyan családja, melyek csúcsai a B gömb felületén fekszenek.

Legyen P_0 egy konvex poliéder, $c \, \epsilon \, \text{int} \, P_0 \subseteq \, B$, ahol $\text{int} \, P_0$ jelöli P_0 belsejét (pl. P_0 lehet egy B-be írt szabályos test vagy archimédeszi test). Legyen $\mathcal{L}_0$ a P_0 poliéder lapjainak a családja.

Bontsuk fel az $\mathcal{L}_0$ minden egyes háromszögtől különböző lapját a lapok súlypontjaiból, mint közös csúcsból annyi háromszögre, amennyi a lap oldalszáma. Legyen $\mathcal{L}_0'$ az így keletkezett háromszögek és $\mathcal{L}_0$ háromszöglapjainak az összeségének a családja. Legyen $\mathcal{L}_1 = \pi(\mathcal{L}_0')$. Azaz $\mathcal{L}_1$ háromszögeknek egy olyan családja, melyek csúcsai a B gömb felületén fekszenek.

Szemléletesen, $\mathcal{L}_1$ konstrukciója elképzelhető úgy is, hogy a P_0 poliéder háromszögtől különböző lapjaira gúlákat állítunk (úgy, hogy a gúlák csúcsainak c gömbközéppontból a lapra vett vetületei a lapok súlypontjai legyenek), ezeket egyesítjük a P_0 poliéderrel, majd az így keletkező poliéder határolólapjait (melyek mind háromszögek) olyan síkokra vetítjük c-ből, hogy minden csúcsuk a B gömb felületén legyen – így kapjuk $\mathcal{L}_1$-et.



1. ábra. Geodézikus dodekaéder L1

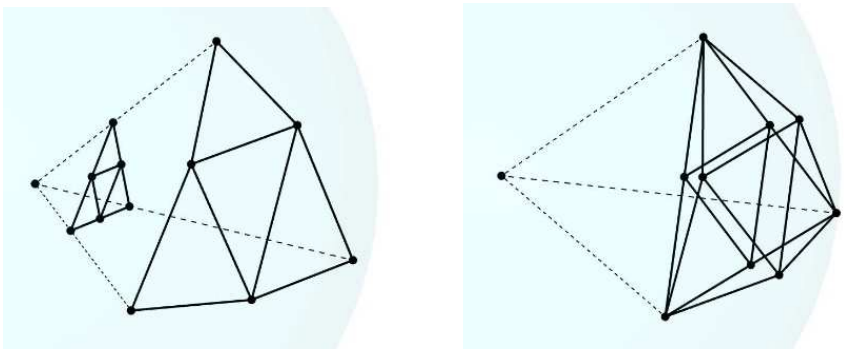
Többféle eljárás is létezik, mellyel n-edrendű geodézikus poliédert készíthetünk egy $(n-1)$-edrendű, csak háromszöglapokat tartalmazó geodézikus poliéderből (amikor $n \geq 2$), most csak a két legegyszerűbbet emeljük ki. Mindegyik esetében először az $(n-1)$-edrendű geodézikus poliéder lapjait bontjuk fel kisebb háromszögekre, majd ezeknek a csúcsait módosítjuk úgy, hogy mindegyik a B gömb felületén legyen. A két eljáráshoz tartozó lapfelbontások:

1. *Egy háromszöglap oldalfelező pontjait berajzolva négy, az eredeti háromszöglappal hasonló háromszögre bontunk fel egy háromszöglapot (ld. 2. ábrát).*

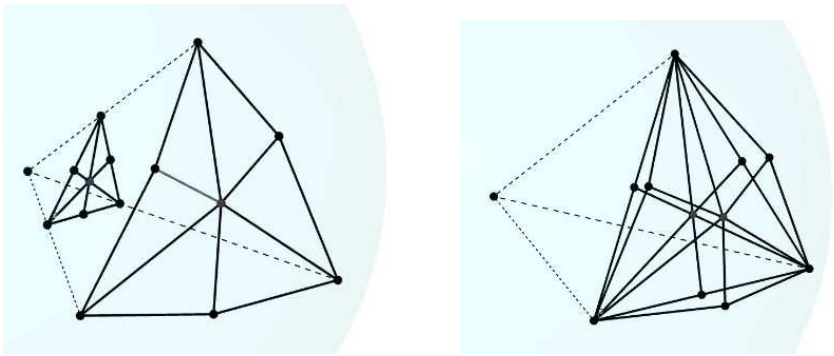
2. *Egy háromszöglap oldalfelező pontjait és súlypontját berajzolva hat olyan kisebb háromszögre bontjuk fel a háromszög-lapot, melyeknek az egyik csúcsa a háromszöglap valamelyik csúcsa, másik csúcsa egy oldalfelező pontja, harmadik csúcsa pedig a súlypontja (ld. 3. ábrát).*

Az 1. vagy 2. háromszögfelbontási eljárások valamelyikét az $\mathcal{L}_{n-1}$ lapcsalád $(n \geq 2)$ minden elemére elvégezve, háromszöglapoknak egy $\mathcal{L}_{n-1}'$ családját kapjuk.

Legyen $\mathcal{L}_n = \pi(\mathcal{L}_{n-1}')$. Ezzel az n-edrendű geodézikus poliéder rekurzív definiálását befejeztük, mivel a poliédert azonosítjuk a határoló lapjainak $\mathcal{L}_n$ családjával (tetszőleges $n \geq 1$ esetére).

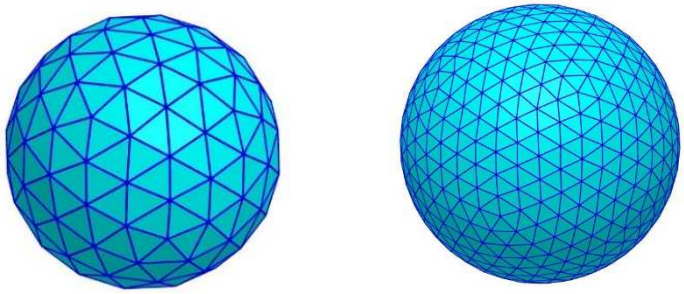


2. ábra. Az 1. eljárás szerinti háromszögfelbontás és gömbi vetítés gömb belsejében, ill. gömb határán levő háromszögcsúcsok esetén

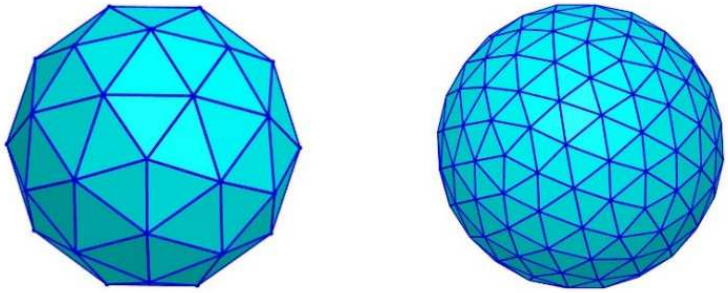


3. ábra. A 2. eljárás szerinti háromszögfelbontás és gömbi vetítés gömb belsejében, ill. gömb határán levő háromszögcsúcsok esetén.

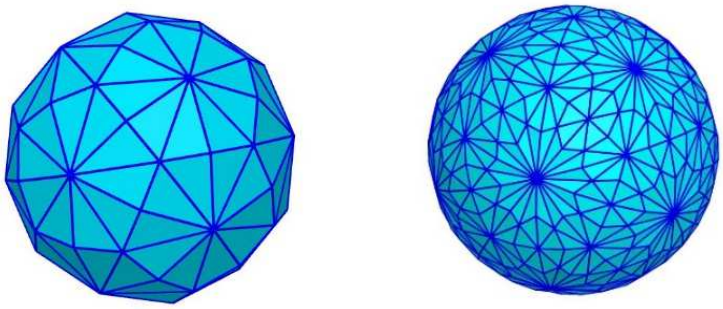
Ha úgy kapunk n-edrendű geodézikus poliédert, hogy csak az 1. eljárást alkalmazzuk (egymás után $(n-1)$-szer), akkor Ln típusú geodézikus poliéderről beszélünk, ha pedig csak a 2. eljárást alkalmazzuk (egymás után $(n-1)$ -szer), akkor LnT típusú geodézikus poliéderről (példákat láthatunk erre a 4-6. ábrákon, ahol szabályos ikozaéder, ill. dodekaéder a P_0 alaptest, és körülírt gömbjük B), ld. [1]. A többi eljárás felsorolása megtalálható [2]-ben (ld. még [3]).



4. ábra. Geodézikus dodekaéderek L2 és L3

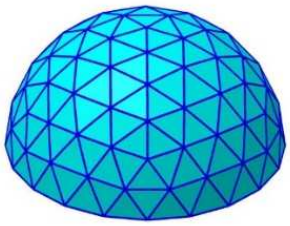


5. ábra. Geodézikus ikozaéderek L2 és L3



6. ábra. Geodézikus ikozaéderek L2T és L3T

Ha van olyan sík, amely kettészel egy geodézikus poliédert úgy, hogy nem metsz bele egyik lapjának a relatív belsejébe sem, akkor az így keletkezett részek geodézikus kupolák, ld. 7. ábrát (a klasszikus esetben, amikor félgömbhöz tartozó kupolát tekintünk, éppen a gömbközépponton átmenő sík szeli ketté a geodézikus poliédert úgy, hogy nem metsz bele egyik lapjának a relatív besejébe sem, de ilyen sík nem mindig létezik egy adott geodézikus poliéderre).



7. ábra. Geodézikus ikozaéder kupola L3

Megjegyzendő, hogy az Ln eljáráshoz nagyon hasonló a még Fuller által bevezetett nV eljárás, ld. [1]-[3] (ez egyetlen lépés, nem többszöri ismétlése egy eljárásnak): Ekkor a P_0 alappoliéderből képzett L1 típusú poliéder mindegyik háromszöglapját úgy osztjuk fel vele hasonló, kisebb háromszögekre, hogy a háromszöglap éleit n egyenlő részre osztjuk fel, és az osztópontokon átmenő, a lap oldalaival párhuzamos egyenesek határoznak meg egy háromszöglapfelosztást.

Az összes lapra elkészítve ezt a felosztást, egy $\mathcal{L}'_n$ családját kapjuk háromszögeknek. Ezek csúcsait vetítjük a c gömbközéppontból a B gömb felületére, és az ezekhez a vetületi pontokhoz tartozó háromszöglapok $\mathcal{L}_n = \pi(\mathcal{L}'_n)$ családja határozza meg az nV geodézikus poliédert.

Tehát ugyanazon P_0 alappoliéder esetén az L2 és 2V geodézikus poliéderek megegyeznek, és $n = 2^{k-1}$ (ahol $k \geq 2$ egész szám) esetén az Lk és nV poliéderek laphálója kombinatorikailag ekvivalens (azaz ugyanolyan elrendezésű és illeszkedésű lapokból állnak, de az élhosszak különbözők lehetnek).

Elmondható, hogy általában az nV típusú geodézikus poliéderek esetén jóval többféle élhossz fordul elő, mint az Lk típusú poliéderek esetén, ha ugyanaz a P_0 alappoliéderük és $n = 2^{k-1}$(azaz kombinatorikailag ekvivalensek a laphálóik), és ez még inkább így van, ha az alappoliéder szabályos vagy archimédeszi test.

Gömböt közelítő, csak háromszöglapokkal rendelkező poliéder esetén az ideális az lenne, amikor csak egyféle élhossz fordul elő az éleknél (mert ekkor a legegyszerűbb az élszerkezet megvalósítása). Ekkor a poliéder minden lapja szabályos háromszög lenne. Az ilyen poliédereket deltaédereknek nevezik, és ismert, hogy csak véges sok (nevezetesen 8-féle) konvex deltaéder létezik, pl. legfeljebb 20 csúcsuk lehet.

Tehát, ha gömbnek akármilyen jó poliéderközelítésére szeretnénk konstrukciót adni háromszöglapú konvex poliéderekkel, akkor biztosan tudható, hogy legalább kétféle élhosszúság fog szerepelni a poliéder élhosszai között 20 csúcsszám fölött.

2. Gömbközelítés mértéke

Precízen definiálható, hogy mit értünk azon, hogy egy poliéder alakja jól közelít gömböt. Ha egy P poliéder körülírt és beírt gömbjei B_1 és B_2, akkor ezek r_1 és r_2 sugarainak az r_1/r_2 hányadosa alapján meghatározható a gömbközeli alak mértéke (körülírt gömbön a P -t tartalmazó legkisebb sugarú gömböt értjük, beírt gömbön pedig egy, a P-ben elhelyezhető lehető legnagyobb sugarú gömböt).

Nevezetesen, minél közelebbi ez a hányados 1-hez, annál jobban közelíti P alakja egy gömb alakját.

Geodézikus poliéderek esetén azért mondjuk, hogy alakjuk jól közelíti a gömbét, mert bármely alaptestből kiindulva, valamely elkészítési eljárásukat megfelelően sokszor alkalmazva, az adódó geodézikus poliéderre az r_1/r_2 hányados tetszólegesen közel lesz 1-hez, ha a csúcsszámuk tart végtelenhez.

Ez az Ln és LnT geodézikus poliéderkonstrukciók esetében azért van így, mert az ilyen poliéderek körülírt gömbje egy fix gömb, míg az élhosszaik, és így a háromszöglapjaik átmérői is egyre közelebb kerülnek 0-hoz, emiatt a beírt gömbjeik sugarai egyre közelebbiek a körülírt gömb sugarához, ahogy n növekszik.

1. Megoldatlan probléma. Ha egy 3-dimenziós konvex poliédernek minden lapja háromszög, és k-féle élhossz fordul elő az élei esetében, valamely k egész számra ($k \geq 2$), akkor mennyire közelítheti meg a poliéder alakja egy gömb alakját, azaz az r_1/r_2 hányados (amely a körülírt gömbje sugarának és a beírt gömbje sugarának a hányadosa) mennyire lehet közel 1-hez?

Mivel legalább kétféle élhossz esetén lehet akármilyen sok csúcsa egy poliédernek, ezért nem igaz, hogy csak véges sok poliéder vizsgálata elégséges az előbbi kérdés megválaszolásához.

2. Megoldatlan probléma. Egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén legalább mekkora egy tetszőleges, csupa háromszöglappal rendelkező, 3-dimenziós konvex poliéderre kiszámított

H/h hányados, ahol H a poliéder leghosszabb élének, h a poliéder legrövidebb élének a hossza, ha fennál, hogy a poliéderre az r_1/r_2 hányados (amely a körülírt gömbje sugarának és egy beírt gömbje sugarának a hányadosa) legfeljebb $(1+\varepsilon)$?

3. A geodézikus kupolák és geodézikus poliéderek története

Geodézikus kupolát elsőként Walther Bauersfeld tervezett a jénai planetáriumba, amelynek első verzióját a Zeiss Művek egyik épületének a tetejére építették 1923-ban, majd ezután egy nagyobb, szintúgy geodézikus kupolával rendelkező, de önálló épületben elhelyezett planetáriumot is tervezett, ez 1926-ban nyílt meg a látogatók előtt.

A geodézikus kupolák és geodézikus poliéder szerkezetű épületek Richard Buckminster Fuller népszerűsítésében váltak közismertté, ő valószínűleg Bauersfeldtől függetlenül újra felfedezte a geodézikus kupolákat, valamint a geodézikus poliédereket, és azokra többféle lehetséges elkészítési eljárást is szisztematikusan feltérképezett.

Buckminster Fuller az 1940-es évek második felétől foglalkozott ezzel a témakörrel, és 1954-ben az USA-ban szabadalmaztatott is bizonyos típusú geodézikus kupolákat. Továbbá, az általa alapított cégeken keresztül több ezer, geodézikus kupola és geodézikus poliéder szerkezetű épület megvalósításában közreműködött.

Az 1960-as években volt a geodézikus kupolák és poliéderek fénykora, pl. az 1967-es Montreáli Expo amerikai pavilonja is egy Buckminster Fuller tervei alapján készült geodézikus kupola volt.

A balatonboglári Xantus János Gömbkilátó fémszerkezete egy geodézikus poliéder élváza, ez a Kádár István által az 1963-as BNV-re tervezett Magyar Atomium, a belföldi idegen-forgalom pavilonjának a háromszöglemezektől megfosztott, és Városligetből Balatonboglárra szállított szerkezete, melyet az 1958-as Brüsszeli Világkiállítás jelképévé vált Atomium ihletett.

A Gömbkilátó poliéderszerkezete az ún. geodézikus dodekaéder L2 poliédernek felel meg (ld. 4. fejezetet), 240 háromszöglapból, 360 élből és 122 csúcsból áll. Négyféle hosszúságú él alkotja az élvázát, ezek kétféle háromszöglapot határoznak meg. A leghosszabb él a legrövidebb élnél kb. 16%-kal hosszabb csupán. A poliéder mindegyik csúcsában 6 él találkozik, kivéve 12 csúcsot, amelyekben pontosan 5 él találkozik - ezek egy szabályos dodekaéder csúcsainak az irányában helyezkednek el.

4. Gömbközelítés Goldberg-poliéderekkel

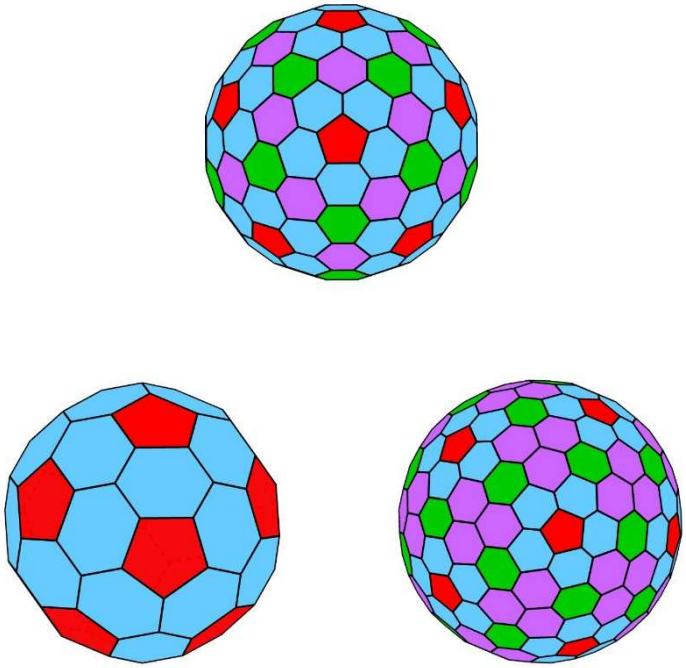
Goldberg-poliéderen olyan konvex poliédert értünk, amelynek ikozaéderes forgási szimmetriája van, minden lapja ötszög vagy hatszög, és egy csúcsban három lap találkozik.

A geodézikus poliéderek közül soknak a duálisa (pontosabban: körülírt gömbjükhöz tartozó poláris poliédere) egy Goldberg-poliéder (ld. 8. ábra), pl. amikor ikozaéder vagy dodekaéder alaptestből indulunk ki, és az ikozaéderes forgásszimmetriát, valamint a konvexitást megőrizzük a geodézikus poliéder elkészítése során, akkor ilyen poliédert kapunk – tehát a geodézikus dodekaéder Ln és geodézikus ikozaéder Ln poliéderek esetében ez a helyzet, amikor $2 \leq n \leq 3$.

Olyan esetekben, amikor egy poliéder minden csúcsa a körülírt gömbjének a felületén található, a poliédernek ehhez a gömbhöz tartozó poláris poliédere megkapható, mint a poliéder csúcsaihoz húzott, a körülírt gömböt érintő síkok ezen gömböt tartalmazó féltereinek metszete, ha a gömb sugara 1 – más gömbsugár esetén pedig még az így (félterek metszeteként) keletkezett poliéderre egy olyan középpontos hasonlóságot kell alkalmazni, melynek arányossági tényezője $1/r^2$ és középpontja a körülírt gömb középpontja, ahol r a

kiindulási poliéder körülírt gömbjének a sugara. A poláris poliéder laphálója a kiindulási poliéder duálisa, így egy konvex geodézikus poliéder olyan csúcsához, melyben 6 él fut össze, annak poláris poliéderében egy hatszöglap tartozik, ill. a geodézikus poliéder egy-egy háromszöglapjához a poláris poliéderében egy-egy olyan csúcs tartozik, ahol pontosan három poliéderlap találkozik.

Mivel geodézikus poliéderek poláris poliédereinek a beírt gömbjük érinti a lapjaikat, ezért az így készített Goldberg-poliéderek jó gömbközelítések, hiszen a lapjaik átmérői tartanak 0-hoz, ha a lapjaik száma tart végtelenhez.



8. ábra. Goldberg-poliéderek: poláris poliéderei a geodézikus dodekaéder L2, geodézikus ikozaéder L2 és L3 poliédereknek

A kémiában is feltűnik bizonyos (a nanotechnológiában alkalmazható) molekulák kapcsolata a geodézikus poliéderekkel: a fullerének olyan szénmolekulák, melyek egyes típusai gömbhéjszerkezetűek, azaz egy gömb felületéhez közel elhelyezkedő atomokkal rendelkeznek, elég nagy üres térrészt közrezárva – ezeknek a molekuláknak sok érdekes tulajdonságuk van. Az elsőként talált ilyen molekula, a Buckminsterfullerén-C60 (amely focilabda alakú) 1985-ös felfedezéséért 1996-ban kémiai Nobel-díjat kapott H. Kroto, R. Curl és R. Smalley. Azóta már találtak olyan fullerént is (a C240 jelűt), amely 240 szénatomból áll, és szerkezete a balatonboglári Gömbkilátó geodézikus poliéderének duálisa (pontosabban: poláris poliédere) – ez egy Goldberg poliéder.

5. Poliéderek a SZIE YMÉK építész hallgatóinak geometria oktatásában

A Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Karán tartott Számítógépes térgeometriai modellezés szabadon választható tárgy tematikájában nagy hangsúllyal szerepel a poliéderek témaköre. A Számítógépes térgeometriai modellezés tárgy építész hallgatói korábbi tanulmányaik alapján általában már jól ismerik a szabályos testeket, és alapozó CAD kurzuson azok modellezését is elsajátították. A térgeometria kurzuson mindezen túlmenően,

megismerkednek az archimédeszi testekkel és a Johnson poliéderekkel, valamint azok számítógépes modellezését is megtanulják: szabályos sokszöglapok megfelelő (térben kiszerkesztett) szögben való felhajtásával készítik el ilyen poliédereknek a csúcsalakzatait, amely lépés után az egész poliéder elkészítése már nem nehéz. Elsajátítják azt is, hogy ehelyett szelések (csonkolások) és eltolások (testek vagy lapok eltolásai) is alkalmazhatók bizonyos archimédeszi testek elkészítésekor, alkalmasan választott szabályos testből kiindulva.

A térgeometria tantárgyi tematikában szerepel az is, hogy archimédeszi test csúcsait felhasználva egymást metsző sokszöglapok vagy csillagsokszöglapok csúcsaiként, uniform csillagpoliédereket készíthetünk.

A hallgatók által a szabályos testekre már megismert dualitás fogalmat kiterjesztjük archimédeszi poliéderek duális poliédereinek a meghatározására is, a körülírt gömbjükhöz tartozó poláris poliéderüket elkészítve állítunk elő ilyen poliédereket.

A kurzusokon a CAD modellezés AutoCAD szoftverrel történik, emellett dinamikus geometriai szoftvereket (Cabri 3D, GeoGebra) is használunk poliéder-modellezésre. Ez utóbbi esetekben a szabályos testek már elérhetők közvetlen paranccsal, illetve a szoftverre sajátosan jellemző eszközökkel is kombinálhatjuk a fentebb említett poliéderek elkészítését, pl. Cabri 3D esetében konvex burok eszköz is használható, GeoGebra esetében pedig objektumok (pl. csúcsok, lapok) sorozata készíthető el akár egyetlen paranccsal.

Egy poliéder laphálójának dinamikus kinyitása/becsukása is megvalósítható a nevezett dinamikus geometriai szoftverekkel – akár egy ennek megfelelő eszköz behívásával (Cabri 3D-ben konvex poliéderek esetén, GeoGebrában pedig gúla, hasáb, szabályos testek esetén), akár a felhasználó által elkészítve, sokszöglapok megfelelő forgatásait megvalósítva, a forgatási szögeket alkalmasan változtatva.

6. Geodézikus poliéderek modellezése

A 2015/16-os tanévben a geodézikus poliéderek modellezése is bekerült a Számítógépes térgeometriai modellezés tárgy tematikájának poliéderekkel foglalkozó tananyagrészébe, mivel építészeti szempontból is érdekes, önhordó szerkezetekkel bírnak azok az építmények, melyek szerkezete geodézikus poliédernek, vagy geodézikus kupolának az élváza.

Geodézikus poliédereknek, ill. kupoláknak a számítógépes modellezésekor olykor hatékonyan lehet alkalmazni geometriai transzformációkat, mivel ha szabályos test vagy archimédeszi test laphálójának finomításaként készítünk el egy geodézikus poliédert, akkor egy megfelelő poliéderrész elkészítése után, alkalmasan (a kiindulási test szimmetriáihoz tartozó) választott forgatásokat, tükrözéseket alkalmazva az egész geodézikus poliéder felszínét megkaphatjuk. Ezáltal geodézikus poliéderek készítése közben a hallgatók elmélyíthetik ismereteiket a geometriai transzformációk témakörében, és a poliéderek alaptulajdonságait is jobban elsajátíthatják.

Az egyes szoftverek esetében sajátságos problémák jönnek elő a geodézikus poliéderek modellezésekor, ill. egyes fogások sokkal könnyebben megvalósíthatók bizonyos szoftverekkel, mint másokkal.

AutoCAD szoftver esetén nehézkes a gömbfelületre vetítés, ehhez gömbfelület és félegyenes metszéspontját kell megszerkeszteni. Azonban a gömb sugarának és a félegyenes irányának ismeretében a metszéspont könnyen megszerkeszthető.

Cabri 3D esetén nincs lehetőség több alakzat egyidejű transzformációjára vagy több transzformációra egy lépésben (ld. mint a poláris kiosztás AutoCAD-ben, vagy a listaműveletek GeoGebrában). Csúcsok vagy poliéderek konvex burka ellenben könnyen képezhető, de vigyázni kell, mert az L*n*T típusú geodézikus poliéderek nem mindig konvexek!

A GeoGebra az alappoliédereken (hasáb, gúla, szabályos testek) kívül más poliédert nem tud kezelni poliéderként, de sokszöglapok listájaként lehet kezelni ezeket. Poliéder síkkal való szelését sem ismeri a Geogebra, de poliéder sokszöglapjait lehet síkkal metszeni.

7. Oktatási tapasztalat

A Számítógépes térgeometria kurzusok hallgatói a 2015/16 tanévben szívesen foglalkoztak geodézikus poliéderekkel, pedig házi feladatot is kaptak ebből a témakörből. Általában Cabri 3D szoftverrel dolgoztak a legszívesebben, még ha itt egyesével is kellett minden transzformációt végrehajtani az egész poliéder elkészítéséhez (de szerencsére a konvex burok képzés lehetősége miatt egyre nagyobb és nagyobb poliéderrésszel dolgozhattak). Meglepődtek, amikor egy L*n*T típusú geodézikus poliéderre az jött ki, hogy nem konvex (ekkor a konvex burok képzést óvatosan, megfelelő poléderrészekre lehetett csak alkalmazni Cabri 3D-ben).

Mindegyik használt szoftverre igaz volt, hogy több száz lapú geodézikus poliédert lehetett velük aránylag kényelmesen elkészíteni, de a többezer lapú poliéderek modellezése már szoftveres problémákba ütközött. A térbeli szerkesztés során ügyelniük kellett rá, hogy a poliéder lapjainak minden oldalát másik lap határolja, és két lapnak közös éle vagy közös csúcsa lehet, más közös részük nem lehet. A hallgatók változatosan használtak forgatásokat, síkra, egyenesre és pontra vonatkozó tükrözéseket a geodézikus poliéderek elkészítéséhez, sokszor azt is figyelembe véve, hogy egy adott szoftver esetén egy bizonyos nézetben melyik a legkönnyebben megvalósítható művelet.

Összeségében hasznosnak gondolom a geodézikus poliéderek témakörének a bevonását a tantárgy tematikájába, a való élethez és az építészethez való közvetlen kapcsolata miatt, valamint mert a hallgatók számára a poliéderek és a geometriai transzformációk tulajdonságainak jobb megértésére, és a virtuális térbeli modellező munka révén a térlátásuk fejlesztésére adott lehetőséget.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni Németh Lászlónak, hogy erről a témakörről előadhattam Sopronban a Matematika Oktatása és Kutatása Szeminárium (MOKUS) 2016-os programjában.

Irodalomjegyzék

[1] **Mueller, R. K.**, Geodesic Polyhedra, at http://simplydifferently.org/Geodesic_Polyhedra, 2007 (last updated in 2012).
[2] **Popko, E. S.**, Divided Spheres: Geodesics and the Orderly Subdivision of the Sphere, CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
[3] **Pugh, A.**, Polyhedra: A Visual Approach, University of California Press, Berkeley, CA, 1976.

Automatikus kiértékelő program ionogramok értelmezéséhez

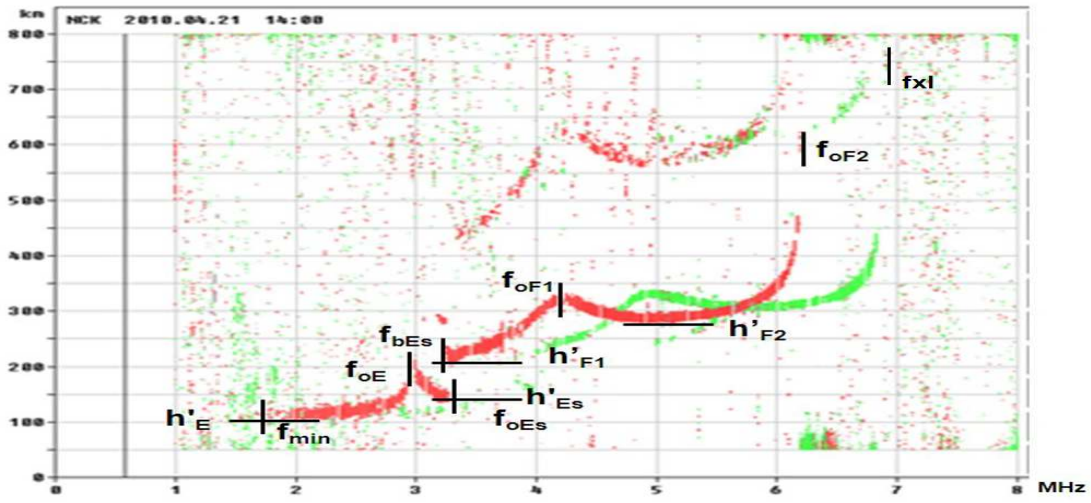
Kalmár János
MTA CSFK GGI
kalmar@ggki.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az ionoszondák (speciális radarok) előállította ionogramok adnak tájékoztatást az ionoszféra aktuális állapotáról és szerkezetéről [4], melyből a rádióhullámok terjedési sajátosságaira és az űridőjárásra (pl. napkitörések) következtethetünk. A tanulmány bemutatja az ionogramok automatikus kiértékelését végző, a szerző által írt programot.

ABSTRACT. Ionograms produced by ionosondes (special radars) provide information on the instantaneous state and structure [4] of the ionosphere. This information can be used to infer radio propagation characteristics and effects of space weather events (eg. Solar flares) on the Earth's upper atmosphere. This study introduces a software developed by the author for automatic processing of ionogram.

1. Bevezetés.

Az ionogramokat ionoszondák állítják elő: széles frekvenciasávon (1-16 MHz) rádiójelekkel 'bombázzák' az ionoszférát, és (mint a radar) mérik az ionoszféra réteghatárokon visszavert jelek által megtett utat, vagyis a visszaverő felület magasságát. A mérés eredménye lényegében zajos digitális képként (1. ábra) jelenik meg, melynek értelmezése még gyakorlott kiértékelőnek sem egyszerű feladat.



1. ábra. Ionogram a meghatározandó pozíciókkal és értékekkel

A kiértékelés célja az ionoszféra rétegek és jellemző pontjaik azonosítása (digitalizálása). A manuális digitalizálás szubjektív hibákkal terhelt. A kiértékelés minőségét és sebességét jelentősen befolyásolja a kiértékelő személy tapasztalata és gyakorlata. Pontatlansága mellett jelentős élőerőt köt le, és kapacitás hiányában intézetünkben jelentős számú ionogram vár még kiértékelésre, ezért indokoltnak látszott a folyamat felgyorsítása automatizálás révén.

2. Az ionogram kiértékelés jelene

A humán ionogram feldolgozás betanítással kezdődik, mert a valós ionoszféra rétegek (E, E_s, F_1, F_2) ordinary (piros pontok az 1. ábrán) visszhangja mellett az extraordinary (vízszintesen eltolt zöld) és a másodlagos (függőlegesen eltolt, többszörös visszaverődésű) reflexiós rétegek is megjelenhetnek a képen. Egy réteg képe az ionogramon vonalszerű folt, mely foltok akár összecsúszhatnak, illetve szét is szakadhatnak, ami tovább nehezíti azonosításukat. A rétegek kialakulása függ a mérés időpontjától is, ezért csak abban lehetünk biztosak, hogy a legfelső, F_2 réteg biztosan előfordul, ezért az f_{0F2} határfrekvencia minden ionogramon megtalálható. Tudjuk továbbá, hogy 80 km alatti és 500 km feletti réteg nem fordulhat elő – tehát ami ott van, csak zaj lehet.

A kiértékelés automatizálásának igénye már korábban felmerült, pl. az Artist programot [2] amerikai kutatók (Massachusetts University) fejlesztik több mint 25 éve, közvetlen elődje az UMLCAR SAO-X DIDBase [1] program volt. Olasz kutatók fejlesztik az Autoscala programot [3]. Mindkét program 95%-os valószínűséggel határozza meg az ionogram jellegzetes pontjait legfeljebb 0,25-0,75 MHz és 25-75 km hibával [6], ami az elméleti felbontás 10-100 szorosa! Alkalmasak viszont többféle ionoszonda regisztrátumának elemzésére.

3. Az ionogram kiértékelés jövője

Az automatizált, számítógéppel támogatott ionogram feldolgozás előnyei:

a. Gyorsabb, pontosabb, kevesebb élőerőt igényel,
b. Egyszerűsíti az utófeldolgozást és a ‘hátralék’ feldolgozását,
c. Lehetővé teszi a sűrűbb mintavételezést (ez jelenleg a GGI-ben fél óra),
d. Feldolgozás után az ionogram tömörebben, függvényekkel tárolható,
e. Valós időben képes automatikusan elemezni az ionoszonda adatokat, ezért riasztásra is alkalmas pl. űrvihar esetén [5].

4. Az ionogram kiértékelés matematikai modellje

Az ionogram modellünkben egy raszteres digitális kép, eszerint kezeljük és elemezzük. Egyidejűleg az ionogramnak csak egyik színét vizsgáljuk (elsősorban az ordinary komponenst), ezért az ionogramot fekete-fehér digitális képnek tekintjük. A nem vizsgált színeket (és később az elkülönített zajt is) a háttérszínnel helyettesítjük. Egy átlagos ionogramon a színes pixelek száma többszázezer, ezért elemzése időigényes. A zajos digitális képen a klaszteranalízis összevonás és felosztás módszereivel keressük meg a releváns ionoszonda visszhangokat, ahol egy klaszter (osztály) a kép azon része, mely az ionoszféra adott réteghatárához tartozó visszhangokat tartalmazza - ez a gyakorlatban egy vonalszerű foltja a képnek.

5. Az ionogram kiértékelés algoritmusa

Folt a kép azon összefüggő része, melynek bármely két pontja összeköthető azonos színű, szomszédokon átvezető úttal (foltkeresés rekurzív algoritmussal) – ebben az értelemben egy ionogram még több ezer foltot tartalmaz!

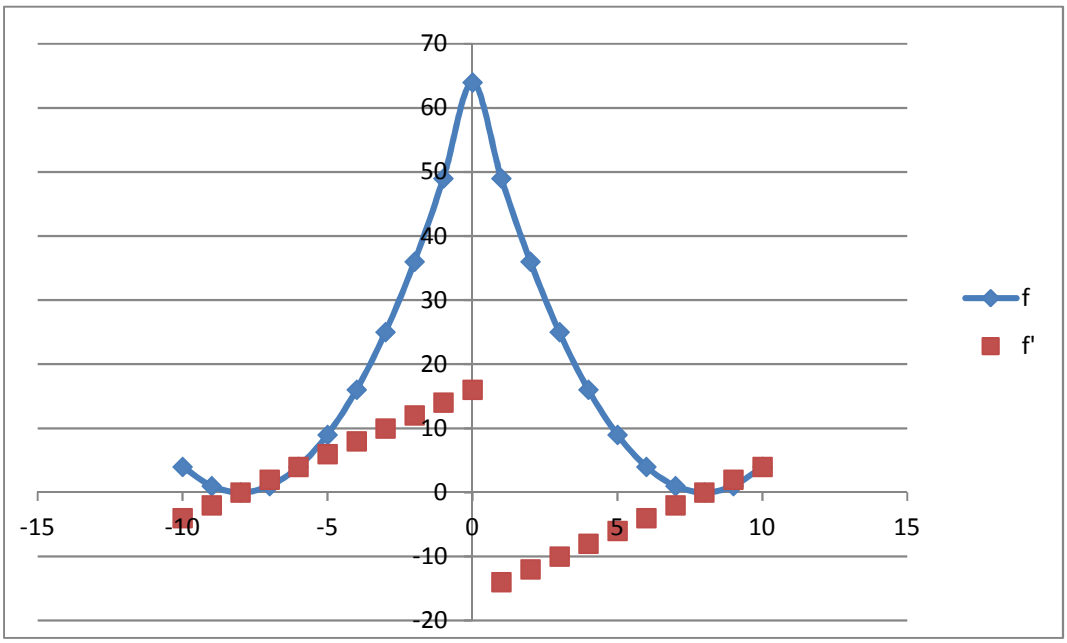
Vonjuk össze azon foltokat (ugyanis mérési hiba is okozhatja az elkülönülést), melyeknek a legközelebbi szomszéd elv szerinti L1 norma távolsága adott korlát alatti (default 4 pixel) – így küszöböljük ki az ionogram szakadási pontjait.

Az összevonások után ellenőrizzük a foltokat: ha egy folt pixeleinek száma adott korlát (default 160) alatti (vagyis túl kicsinek tűnik), akkor a foltot zajnak tekintjük és töröljük – ezután már csak kb. tucatnyi foltot kell megvizsgálni.

Akkor tekintünk egy foltot egy ionoszféra réteg visszhangjának, ha rá úgy illeszthető parabola, hogy az illesztés átlagos hibája (a szórás) kisebb egy előre adott (default 10 pixel) paraméternél, vagyis a folt vonalszerű.

Tehát csak a sokelemű, vonalszerű foltokat tekintjük az ionogram részének, és a foltot az alsó burkolójára illesztett függvény (parabola vagy hiperbola) paramétereivel tárolom az érvényességi frekvencia-határokkal együtt.

Ha a folt ugyan kiterjedt volt, de a parabolaillesztés mégsem sikerült (4. ábra), megvizsgáljuk az okát: lehet, hogy a különböző ionoszféra rétegekhez tartozó visszhangok összecsúsztak, ami onnan ismerhető fel, hogy bár a folt váza folytonos görbének látszik, de a csatlakozási pontban töréspontja van (2. ábra). Ekkor a törésponttól balra eső pontokra illesztett egyenes meredeksége jelentősen eltér a jobbra található pontokra illesztett egyenes meredekségétől, más szóval a töréspontban a bal és jobboldali differenciahányadosok jelentősen különböznek.

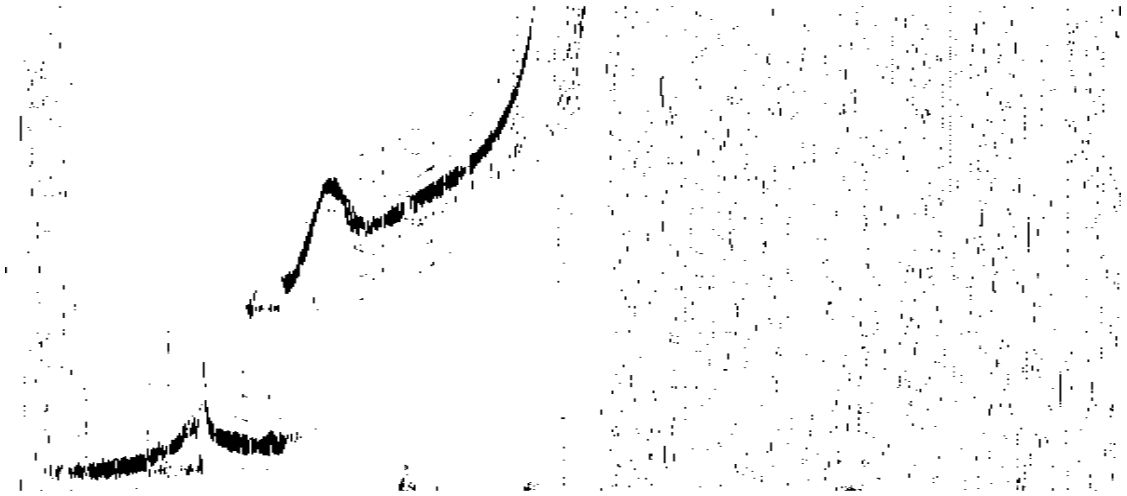


2. ábra. Metsző parabolák és deriváltjaik viselkedése a töréspontban

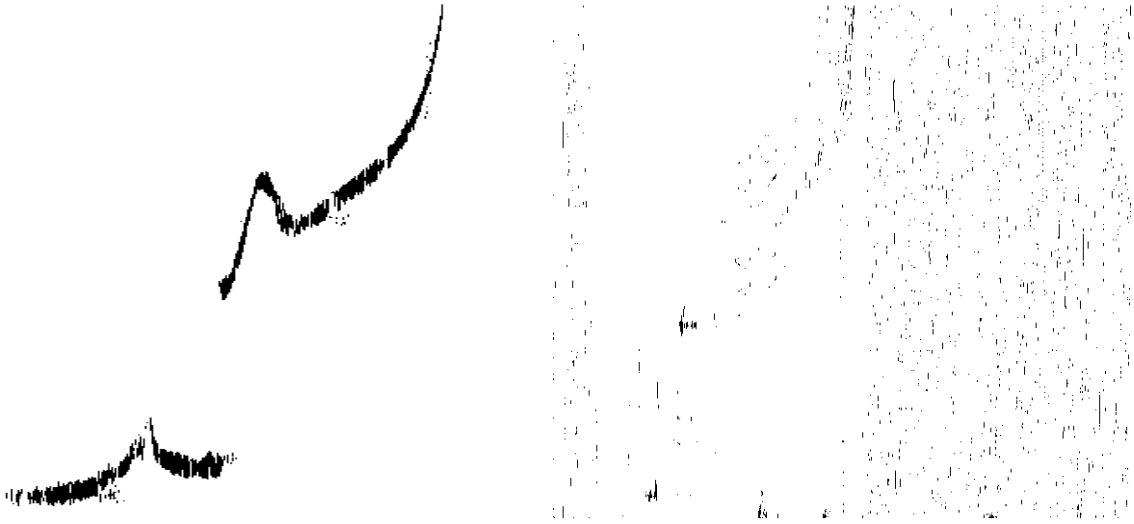
A klaszter vágási frekvenciáját úgy keressük meg, hogy a folt minden frekvenciájához meghatározzuk a differencia-hányadosok bal- és jobboldali határértékét; ahol a különbségüknek maximuma van, és ennek mértéke 2-nél nagyobb, ott a foltot kettévágjuk, a

részfoltokat új klaszternek tekintjük (5. és 6. ábra), és visszalépünk a foltok nagyságának ellenőrzésére.

Ha nem sikerült a parabolaillesztés és szakadási pontot sem találtunk az előző pont szerint, akkor a foltot (klasztert) nagyságától függetlenül zajnak nyilvánítjuk, és töröljük.



3. ábra. Egy alul (80 km-ig) és felül (500 km felett) törölt ordinary ionogram



4. ábra. A 3. ábra ionogramjának releváns foltjai (balra) és a zaj (túl kicsi, vagy nem vonalszerű foltok) a jobb oldalon

5. ábra. A szétvűlasztott E és Es ionoszféra rétegek visszhangja az illesztett görbékkel

6. ábra. A szétválasztott F_1 és F_2 ionoszféra rétegek visszhangja az illesztett görbékkel

min kHz	magasság	max kHz	magasság	b_0	b_1	b_2
1575(fmin)	100,2 km	3625 (f_{0E})	127,7 km	266,1	-0,1284	2,8e-05
3650 (f_{0E})	143,6 km	5000 (f_{0Es})	129,5 km	1623,6	-0,6685	7,6e-05
4750 (f_{bEs})	250,7 km	5375 (f_{0F1})	351,0 km	5555,4	-2, 26	2,4e-04
5375 (f_{0F1})	329,9 km	8075 (f_{0F2})	447,4 km	2696,1	-0,5828	4,8e-05

1. táblázat. Az ionoszféra rétegek visszhangjára illesztett $h(fr) = b_0 + b_1 \cdot fr + b_2 \cdot fr^2$ parabolák

min kHz	magasság	max kHz	magasság	a	b	c
1575(fmin)	89,97 km	3625 (f_{0E})	139,1 km	112,16	-17906	3869
3650 (f_{0E})	151,7 km	5000 (f_{0Es})	114,5 km	149,28	4972	3556
4750 (f_{bEs})	245,7 km	5375 (f_{0F1})	348,5 km	76,07	-446144	6523
5375 (f_{0F1})	308,4 km	8075 (f_{0F2})	471,7 km	369,15	-135436	8596

2. táblázat. Az ionoszféra rétegek visszhangjára illesztett $h(fr) = a + b/(fr - c)$ hiperbolák

6. A program továbbfejlesztésének lehetséges irányai

A program egyelőre külön kezeli az ionogram ordinary (piros) és extraordinary (zöld) görbéit – mivel egyik a másikból eltolással állítható elő, ezért a hiányos ordinary görbék extraordinary párjuk ismerete alapján kiegészíthetők; sajnos, a szakirodalom szerint olyan mérési hiba is előfordulhat, amikor az ordinary és extraordinary görbék teljesen felcserélődnek

Az ionogram görbék függőleges aszimptotáinak (f_{0E}, f_{bEs}, f_{0F1}, f_{0F2}) meghatározását hiperbola-illesztéssel próbáltuk pontosítani. Sajnos a hiperbolaillesztés pontossága egyrészt nem érte el a parabola-illesztés pontosságát, másrészt sokkal időigényesebb volt, és az aszimptoták pozicióját (a 2. táblázat c paramétere) durvábban adta vissza, mint a leolvasott intervallum-korlátok. A még ajánlott tangensfüggvény illesztést nem sikerült elfogadható hibával kivitelezni, a szokásos ionogram görbékre a függvény rosszul illeszthető.

A másodlagos (reflexiós) visszhangok - ha vannak - görbéit törölni kell, mert érdektelenek.

A feldolgozás után kapott paraméteres görbéket egy szakértői (mesterséges intelligencia) rendszer elemezhetné tovább az ionoszféra rétegek azonosítása és a jellegzetes pontok meghatározása végett, melynek a szakirodalom szerint a mérés földrajzi helyét és időpontját (évszak, napszak) is figyelembe kell vennie.

7. Összefoglalás

Az ionogramok automatikus kiértékelését végző új program nagyon jó hatásfokkal képes elkülöníteni a zajt a releváns információtól, helyesen választja szét az ionoszféra rétegek visszhangját, és az ionogram releváns görbéit parabolaként tárolva lehetővé teszi azoknak egy későbbi, szakértői rendszer bázisú azonosítását.

Irodalomjegyzék

[1] **Fox, M.W.** and **Blundell, C.,** 1989. Automatic scaling of digital ionograms. Radio Science, 24, 747-761.

[2] **Galkin, I.A.**, **Reinisch, B. W.**, Grinstein, G. Khmyrov, G. Kozlov, A. Huang, X. and Fung, S. 2004. Automated Exploration of the Radio Plasma Imager Data, J. Geophys. Res., 109, A12210, doi:10.1029/2004JA010439.

[3] **Scotto, C.** and **Pezzopane, M.**, 17-24 August 2002. A software for automatic scaling of foF2 and MUF(3000)F2 from ionograms, Proceedings of URSI 2002, Maastricht.

[4] **Reinisch, B.W.** and **Huang, X.**, 2001. Deducing topside profiles and total electron content from bottomside ionograms, Advances in Space Research, 27, 1, 23-30.

[5] **Reinisch, B. W.**, **Huang, X.**, **Galkin, I. A.**, **Paznukhov, V.** and **Kozlov, A.**, 2005. Recent advances in real-time analysis of ionograms and ionospheric drift measurements with digisondes, J. Atmos. and Solar-Terr. Phys., 67, 1054-1062.

[6] **Stankov, S.M.**, **Jodogne, J.C.**, **Kutiev, I.**, **Stegen, K.**, **Warnant, R.**, 2012. Evaluation of automatic ionogram scaling for use in real-time ionospheric profile specifikation, Annals of Geophysics, 55, 2, 283-291.

A Kepler-féle egyenlet és az affin transzformációk

Péntek Kálmán
NymE SEK TTMK Matematika és Fizikai Intézet
pentek.kalman@nyme.hu

Összefoglaló: A dolgozatban a klasszikus Kepler-egyenlet egy egyszerű geometriai bizonyítását mutatjuk be az affin transzformációk alkalmazásával.

Abstract: In the paper, we present a simple proof of the classical Kepler's Equation with the using of the affin transformations.

1. Bevezetés

1609-ben jelent meg Johannes Kepler (1571-1630) német matematikus és csillagász *Astronomia nova* c. korszakalkotó műve. Ebben a könyvben szerepel a később róla elnevezett bolygómozgási törvények közül az első kettő. A ma elsőként emlegetett törvény azt a tényt rögzíti, hogy a bolygók ellipszis alakú pályákon keringenek a Nap körül úgy, hogy e pályák közös gyújtópontjában a Nap áll. A második törvény a területi sebesség állandóságát mondja ki, vagyis azt, hogy a Naptól a vizsgált bolygóig húzott sugár a bolygó változó sebességű mozgása folytán úgy halad, hogy közben egyenlő nagyságú időtartamok alatt azonos nagyságú területeket súrol. Más szóval a súrolt terület arányos az eltelt idővel. E felismerés fontos következménye az volt, hogy a bolygók a Nap közelében gyorsabban, míg a Naptól távoli pályaíven lassabban mozognak. Fontos kérdés tehát az ellipszis pályán végighaladó bolygók esetén a mozgás időbeni lefolyása, vagyis annak ismerete, hogy az adott időpillanatban az égitest pályájának mely pontján tartózkodik.

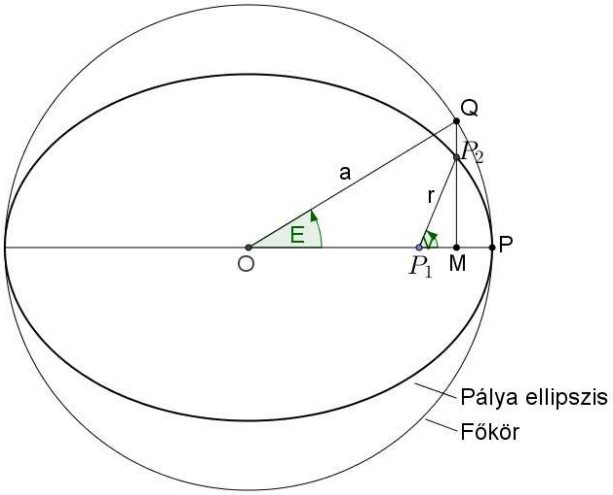
Johannes Kepler bolygómozgási törvényeit Tycho de Brahe (1546-1601) dán csillagász észlelési és mérési eredményeinek gondos, közel 8 éven át tartó elemzésével ismerte fel. A pálya alakját számos lehetséges síkgörbe tanulmányozása után a Pergai Apollóniosz (Kr.e. 265 – Kr. e. 190) által részletesen vizsgált kúpszeletek között találta meg. A bolygók mozgásának időbeni lefolyását leíró egyenletet Kepler geometriai módszerek felhasználásával vezette le saját, második törvényének felhasználásával. A dolgozat ezen, később Kepler-egyenlet néven elhíresült összefüggésnek az affin transzformációkra támaszkodó egyszerű geometriai bizonyítását mutatja be.

2. A Kepler-egyenlet

Tekintsük az O szimmetria középpontú pályaellipszist, tartózkodjék a Nap a P_1 fókuszpontban, ezen ellipszis mentén P_1 körül keringő égitest a t időpillanatban legyen a P_2 pontban. Jelölje $r = P_1P_2$ a Naptól az égitestig húzott rádiuszvektort, s tegyük fel, hogy a vizsgált égitest a P pericentrum ponton a τ időpontban halad át. Rajzoljuk meg a pályaellipszis főkörét, majd állítsunk merőlegest a P_2 pontban az ellipszis nagytengelyére.

Jelölje M e merőleges nagytengellyel alkotott metszéspontját, Q a főkörrel alkotott egyik metszéspontját (1. ábra).

A keringő P_2 égitest helyzetét minden t időpontban egyértelműen jellemzi a $v = PP_1P_2\sphericalangle$, amelyet *valódi anomália*nak nevezünk. A mozgás könnyebb tanulmányozása érdekében az $a = OQ$ főkör sugarának pillanatnyi helyzete is jól jellemzi a P_2 pont pillanatnyi helyzetét, hiszen a Q pontból a pályaellipszis nagytengelyére bocsájtott merőleges ellipszisre eső merőleges vetülete éppen P_2. A Q pont főkörön elfoglalt helyzetét megadja az $E = POQ\sphericalangle$ szög, amelyet *excentrikus anomália*nak nevezünk. Célszerűen a v és az E szögeket egyaránt radiánban mérjük.



1. ábra. A *v* valódi anomália és az *E* excentrikus anomália értelmezése

Feladatunk az ellipszisen végbemenő pályamenti mozgás időbeni leírása, tehát meghatározandó a $v = v(t)$ és az $E = E(t)$ függvénykapcsolat. Az ehhez szükséges geometriai ismereteket az alábbiakban foglaljuk össze.

Az affin transzformációk, vagy röviden affinitások, az euklideszi sík önmagára történő bijektív és egyenestartó leképezései. Az affinitások párhuzamosság-, osztóviszony- és területaránytartó leképezések, amelyeket egyértelműen meghatároz 3 általános helyzetű pont és affin képének megadása. Fontos típust képeznek e leképezések között a tengelyes affinitások, amelyeknél a tengely egyenese pontonként fix. Ekkor a pontokat a képükkel összekötő egyenesek párhuzamosak, amelyet a tengelyes affinitás irányának nevezünk. Ha ez merőleges a tengely irányára, ortogonális affinitásról beszélünk.

Legyen t az affinitás tengelye, P' a P pont ezen affinitás melletti képe, P_0 a PP' és t metszéspontja, akkor a $P'P_0 : PP_0$ arány minden ilyen egymásnak megfelelő pontpár esetén azonos értékű lesz, amelyet a tengelyes affinitás arányának nevezünk. Az affin transzformációk részletes tárgyalását REIMAN [4] könyvében megtalálhatjuk.

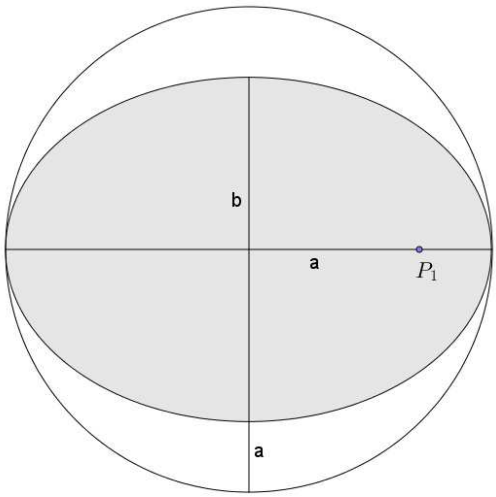
Jelölje ezután $2a$ a vizsgált pályaellipszis nagytengelyét, $2b$ a kistengelyét és tekintsük azt az α tengelyes affinitást, amelynek tengelye az ellipszis nagytengelye, iránya az ellipszis kistengelye és aránya $b:a$. Ez a leképezés ellipszis főkörét pontosan az ellipszisre képezi le (2. ábra).

A pályaellipszis és főköre területaránya a fentiek szerint éppen az α affinitás aránya:

$$\frac{t_{\text{ellipszis}}}{t_{\odot}} = \frac{b}{a}, \tag{1}$$

ahonnan az ellipszis területe:

$$t_{\text{ellipszis}} = \frac{b}{a} \cdot t_{\odot} = \frac{b}{a} \cdot a^2 \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi\,. \tag{2}$$



2. ábra. Az *a* sugarú főkör tengelyes affin képe a 2*a* nagytengelyű és 2*b* kistengelyű ellipszis

Tekintsük a pályaellipszis P_1PP_2 szektorát, amelynek területe Kepler II. törvénye szerint éppen úgy aránylik a teljes ellipszis területéhez, mint ahogyan a PP_2 ellipszis-ív befutásához szükséges t-τ időtartam aránylik a keringő égitest teljes T sziderikus keringési idejéhez:

$$\frac{t_{P_1PP_2}}{t_{\circ}} = \frac{t-\tau}{T}\,. \tag{3}$$

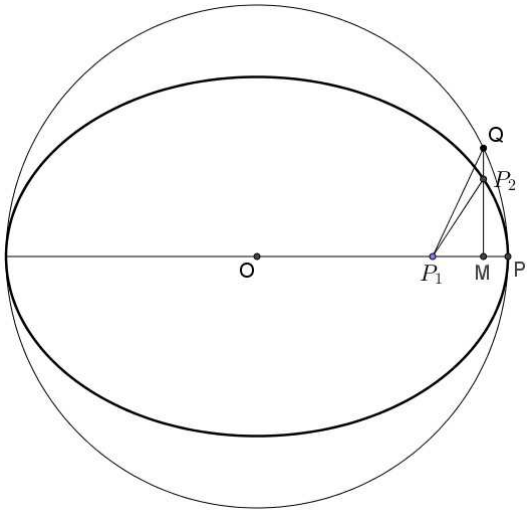
Feladatunk ezért a P_1PP_2 ellipszisszektor területének kiszámítása. Vegyük észre, hogy ezen P_1PP_2 ellipszisszektor éppen a P_1PQ körszektor α tengelyes affinitás melletti képe, ezért a fentiek szerint

$$\frac{t_{P_1PP_2}}{t_{P_1PQ}} = \frac{b}{a} \tag{4}$$

teljesül, ahonnan átrendezéssel

$$t_{P_1PP_2} = \frac{b}{a}\cdot t_{P_1PQ} \tag{5}$$

adódik (3. ábra).

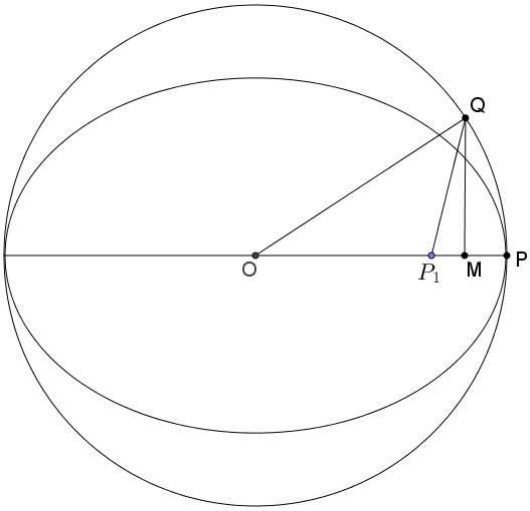


3. ábra. A P_1PQ körszektor tengelyes affin képe a P_1PP_2 ellipszisszektor

Figyeljük azonban meg, hogy a P_1PQ körszektort előállíthatjuk, ha az OPQ körcikkből elhagyjuk az OP_1Q háromszöget, ezért fennáll a

$$t_{P_1PQ} = t_{OPQ} - t_{OP_1Q} \tag{6}$$

összefüggés (4. ábra).



4. ábra. A P_1PQ körszelet előállítása az OPQ körcikk és az OP_1Q háromszög segítségével

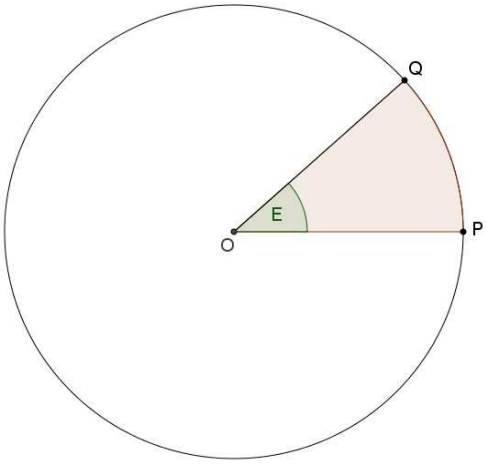
Az OPQ körcikk területét viszont könnyen kaphatjuk, hiszen ennek értéke arányos lévén az E szöggel:

$$\frac{t_{OPQ}}{t_{\odot}} = \frac{E}{2\pi}, \tag{7}$$

ahonnan közvetlenül

$$t_{OPQ} = t_{\odot} \cdot \frac{E}{2\pi} = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{E}{2\pi} = \frac{1}{2}a^2E \tag{8}$$

következik (5. ábra).

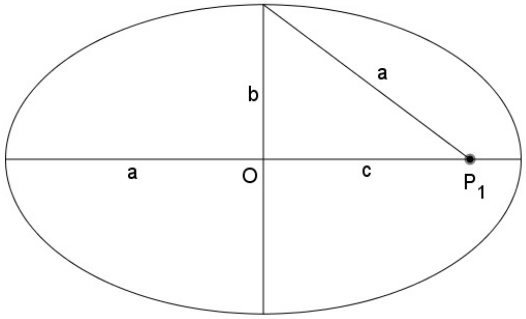


5. ábra: Az E szögű OPQ körcikk

Az OP_1Q háromszög területére pedig fennáll:

$$t_{OP_1Q} = \frac{1}{2}c \cdot a \cdot \sin E = \frac{1}{2}e \cdot a^2 \cdot \sin E \,, \tag{9}$$

ahol $c = d(OP_1)$ a pályaellipszis lineáris excentricitása, továbbá $e = \frac{c}{a}$ jelenti az ellipszis numerikus excentricitását (6. ábra).



6. ábra. A pályaellipszis *a* félnagytengelye, *b* félkistengelye és *c* lineáris excentricitása

Ekkor a P_1PP_2 ellipszisszektor területe (5), (6), (8) és (9) felhasználásával:

$$t_{P_1PP_2} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot E - \frac{1}{2}e \cdot a^2 \cdot \sin E\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{2}(E - e \sin E) = \frac{a \cdot b}{2}(E - e \sin E) \tag{10}$$

adódik. Ekkor a (2), (3) és (10) összefüggések szerint viszont

$$\frac{\frac{a \cdot b}{2}(E - e \cdot \sin E)}{a \cdot b \cdot \pi} = \frac{t - \tau}{T} \tag{11}$$

következik, amelyből egyszerűsítéssel és átrendezéssel közvetlenül adódik a

$$\boxed{E - e \cdot \sin E = \frac{t - \tau}{T} \cdot (t - \tau)} \tag{12}$$

Kepler-egyenlet.

Maga Kepler e formula levezetése során a Szürakuszai Arkhimédesz (Kr. e. 287 – Kr. e. 212): *A konoidokról és szferoidokról*, valamint az Alexandriai Euklidesz (Kr.e. 365? – Kr.e. 300?) *Elemek* c. munkájára támaszkodott. Munkájának eredménye az *Astronomia nova* c. könyve 60. fejezetében olvasható.

A (12) összefüggésben szereplő

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{13}$$

mennyiség a P_2 égitest *közepes szögsebessége*, ezt az égi mechanikában *középmozgás*nak nevezik. A (12) Kepler-egyenlet teljes jobb oldalán álló mennyiséget pedig

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \tag{14}$$

*középanomália*nak mondják, ez az a szög, amelyet a P_2 égitest $t - \tau$ idő alatt leírna, ha T sziderikus keringési ideje változatlan megmaradása mellett a főkörön egyenletesen mozogna. A (14) felhasználásával nyerjük a Kepler-egyenlet szokásos

$$\boxed{E - e \cdot \sin E = M} \tag{15}$$

tömör alakját, amelyből a többi mennyiség ismeretében a feladat az E excentrikus anomália kiszámítása egy adott t időpontban.

Megjegyezzük, hogy a Kepler-egyenlet megoldásaként nyert E excentrikus anomáliából a v valódi anomáliát a

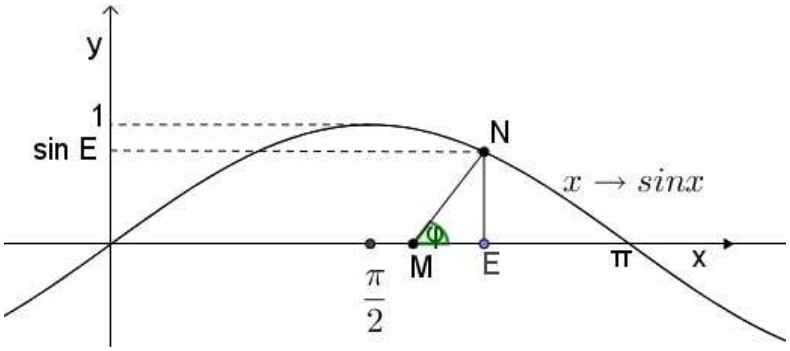
$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg}\frac{E}{2} \tag{16}$$

Gauss-féle képlet alapján számíthatjuk ki, amely képlet levezetése ÉRDI [1] munkájában megtalálható.

2. A Kepler-egyenlet megoldása

Mivel (15) Kepler-egyenlet transzcendens, így csak közelítő módszerekkel lehet megoldani. A továbbiakban egy grafikus megoldási módot mutatunk be, amelyet KÖVESLIGETHY [2] ismertet részletesen.

Feladatunk tehát M és e ismeretében az excentrikus anomália közelítő E értékének meghatározása (7. ábra).



7. ábra. A Kepler-egyenlet közelítő grafikus megoldása

Első lépésként t és T birtokában (14) alapján kiszámítjuk M értékét. Ezután megkeressük M helyét a vízszintes tengelyen. Ezt követően mérünk fel az M pontból kiindulva egy olyan φ szöget, amelyre $\operatorname{ctg}\varphi = e$ teljesül. Az így kapott szögszár és az $x \longmapsto \sin x$ görbéjének N metszéspontját merőlegesen az x-tengelyre vetítve nyerjük az E pontot. Valóban, az $MEN\Delta$ háromszögből

$$\frac{E-M}{\sin E} = \operatorname{ctg}\varphi = e \tag{17}$$

adódik, amelynek átrendezésével

$$E - M = e \cdot \sin E \tag{18}$$

következik, ebből már közvetlenül adódik a (15) Kepler-egyenlet.

Ezzel megkaptuk E közelítő értékét, amelynek egy pontosabb értékéhez is eljuthatunk, pl. a Newton-féle iterációs eljárással.

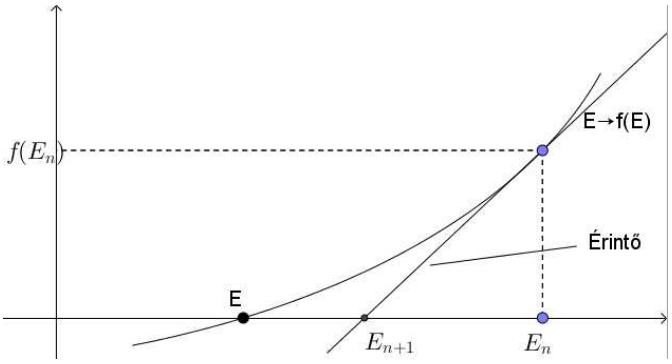
Tekintsük ugyanis az

$$f(E) := E - e \cdot \sin E - M \tag{19}$$

függvényt, amelynek E szerinti első deriváltja

$$f'(E) = 1 - e \cdot \cos E \tag{20}$$

alakú lesz.



8. ábra. Az *E* excentrikus anomália megközelítése a Newton-féle iterációs eljárással

A 8. ábra jelöléseivel ekkor az $f(E)$ görbe E_n abszcisszájú pontjához tartozó érintőjére teljesül az

$$\frac{f(E_n)}{E_n - E_{n+1}} = f'(E_n) \qquad (21)$$

összefüggés, amelynek egyszerű átrendezésével adódik

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} \qquad (n = 0,1,2,\dots)\,, \qquad (22)$$

ha E_O az előző lépésben bemutatott grafikus eljárással nyert közelítő értéke az *E* excentrikus anomáliának.

A Naprendszer bolygóinál az *e* numerikus excentricitás kicsi, de az eljárás nem csupán itt, hanem az elliptikus pályát jellemző teljes $0 \le e < 1$ intervallumon gyorsan konvergál a keresett *E* értékhez.

A Kepler-egyenlet megoldása az egyik legnagyobb jelentőségű problémája a csillagászatnak. A Kepler-probléma megoldására számos eljárás született, ezeket részletesen tárgyalja ODELL-GOODING [3] munkája.

Sir Isaac Newton (1643-1727) munkái nyomán felismerték, hogy az általános tömegvonzás törvényére épülő 2-test probléma megoldása során az égi mechanikában az ellipszis pályák mellett felléphetnek parabola és hiperbola pályák is. Hiperbola pálya esetén pl. a (15) Kepler-egyenlet összefüggésével analóg formula

$$e \cdot \mathrm{sh}H - H = M \qquad (23)$$

alakú, amelynek jelen dolgozatban tárgyaltakhoz hasonló elemi levezetésével a jövőben kívánunk foglalkozni.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki Varga Enikő Erzsébet matematika-német szakos középiskolai tanárnőnek a cikkben szereplő ábraanyag gondos megszerkesztéséért.

Irodalomjegyzék

[1] **Érdi, B.,** Égi mechanika I., Tankönyvkiadó, Budapest, (1977), p.319.
[2] **Kövesligethy, R.,** A mathematikai és csillagászati földrajz kézikönyve, Kogutovicz és társa Magyar Földrajzi Intézete, Budapest, (1899), p.911.
[3] **Odell, A. W.** – Gooding, R. H., Procedures for Solving Kepler's Equation, Celestian Mechanics, 38. (1986), 307-334.
[4] **Reiman, I.,** A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest, (1986), p.419.

Időjárási légnyomásváltozás regressziós analízise

Csanády Viktória
NymE Matematikai Intézet
csanady.viktoria@emk.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Klímakutatók szerint a globális felmelegedés időszakának egyik jellemzője a napjainkban egyre szaporodó időjárási szélsőségek megjelenése. A markáns változások, időjárási frontok jellemzőinek ismerete ezért válik egyre indokoltabbá.

ABSTRACT. Climate researchers have found that one of the characteristics of global-warming is the appearance of ever-increasing number of weather extremes nowadays. Knowledge of the characteristics of striking changes and fronts therefore becomes more and more justified.

1. Bevezetés

Az időjárási frontokra jellemző a jelentékeny mértékű légnyomásváltozás, melynek lefolyása különböző időtartamú és értékű lehet, nagyon eltérő menet és jelleg mellett. Ezért az idő függvényében begyűjtött légnyomásadatok értékelése regressziós statisztikai módszerekkel egy bonyolultabb feladat, mivel nem alkalmazható egyszerű egyféle függvény az egymástól nagyon eltérő folyamatok miatt. A következőkben alkalmazásra kerülő függvény ezért speciális és összetett, az adatsor bemutatott jellege és az illesztés maximális pontossága miatt.

2. A kísérlet leírása

Az adatgyűjtéshez szükséges folyamatos vizsgálat időtartama 2,5 nap azaz 60 óra volt, változó időközökkel. A mérésekkel nyert légnyomásértékek feljegyzése klasszikus Hgmm-ben történt az időpontok szerint. Az adatokat a "Front.STA" táblázat tartalmazza, az adatpárokkal nyert pontsorok képét a "FrontG.STG" jelű ábra mutatja. Ennek alapján megállapítható, hogy az illesztendő függvény görbéjének három inflexiós ponttal, egy minimummal, egy maximummal kell rendelkeznie szimmetria és szabályosság nélkül, valamint végső határértékkel. Ezen igényeknek megfelelően hosszas kísérletezés és ismételt próbák alapján történt az összetett matematikai függvény szerkesztése, melynek algebrai, ill. számítógépi alakja a következő:

A matematikai alak:

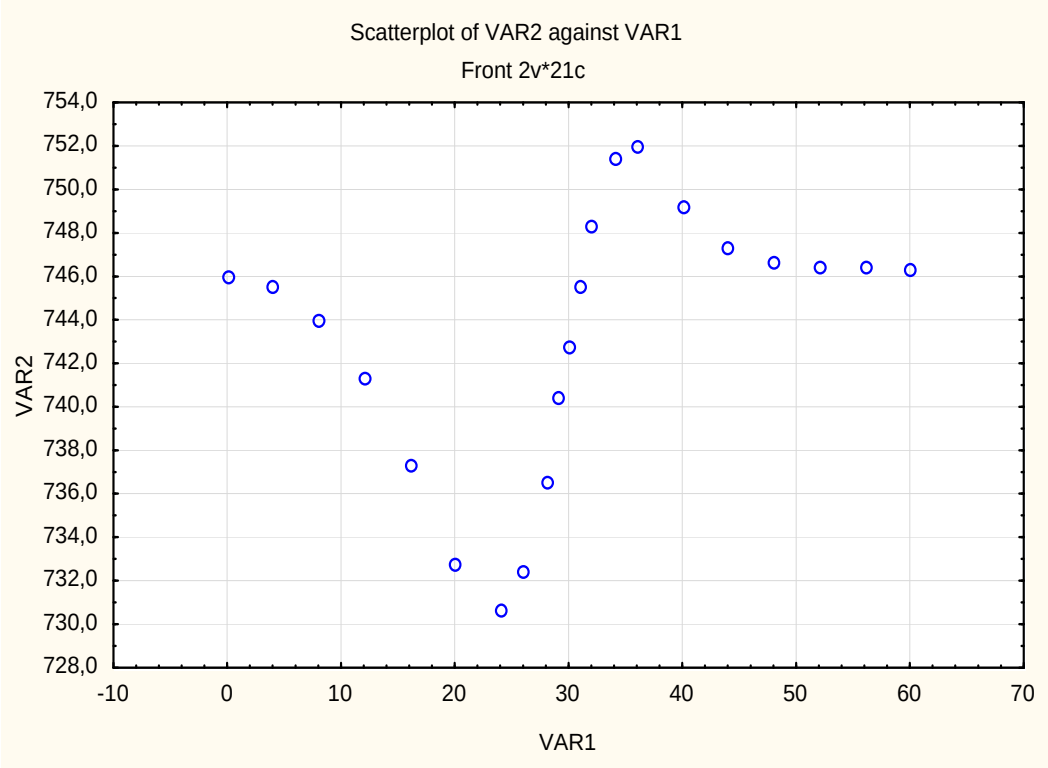
$$\mathbf{y} = \mathrm{a}\,(\sin\left(\mathrm{b}\left(1-\mathrm{e}^{-(\mathrm{cx})^{\mathrm{d}}}\right)\right)/\left(\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{f})\right)^{g}) + \mathrm{h}.$$

A számítógépes alak:

$$\mathbf{var2} = \mathrm{b6} * (\sin(\mathrm{b5} * (1 - \exp(-1 * (\mathrm{b4} * \mathrm{var1})\text{^}\mathrm{b3})))/(\mathrm{b2} * (\mathrm{var1} + \mathrm{b2}))\text{^}\mathrm{b1}) + \mathrm{b0}.$$

	1 VAR1	2 VAR2
1	0,00	746,0
2	4,00	745,6
3	8,00	744,0
4	12,00	741,3
5	16,00	737,3
6	20,00	732,8
7	24,00	730,7
8	26,00	732,5
9	28,00	736,6
10	29,00	740,5
11	30,00	742,8
12	31,00	745,6
13	32,00	748,3
14	34,00	751,5
15	36,00	752,0
16	40,00	749,2
17	44,00	747,3
18	48,00	746,7
19	52,00	746,5
20	56,00	746,4
21	60,00	746,3

1. táblázat. Front.STA



1. ábra. FrontG.STG

A fentiekben megadott hét paraméteres függvény paramétereinek kezdőértékei az adatok nagyságrendje és bemutatott képe alapján a következők:

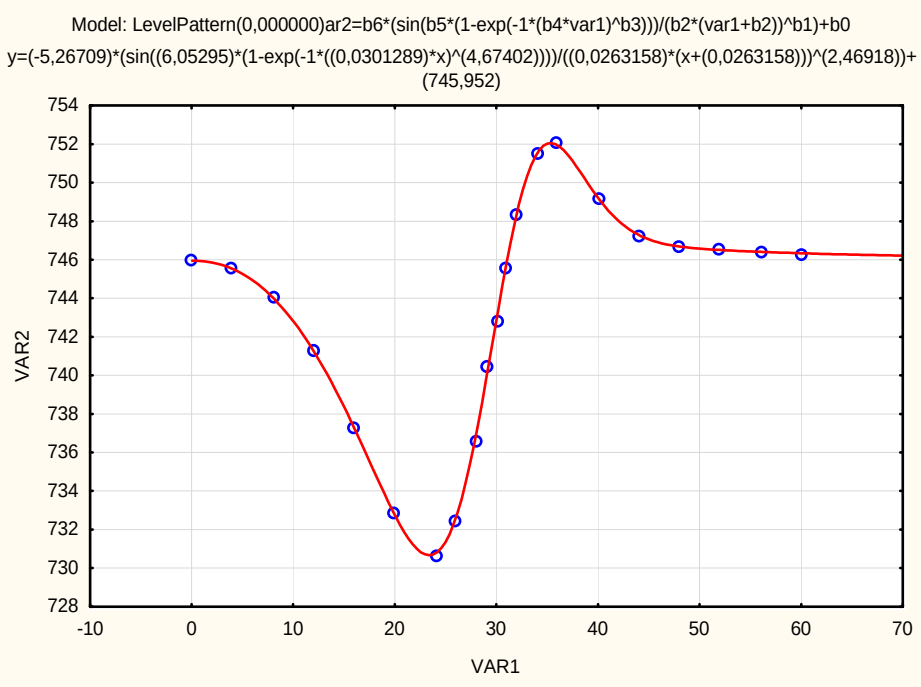
$$b6 = -15 \quad b5 = 6 \quad b4 = 0{,}05 \quad b3 = 3 \quad b2 = 0{,}05 \quad b1 = 2 \quad b0 = 746.$$

A pontsorozat képének változatossága egyértelműen mutatja, hogy szükséges nagyszámú (7 db.) befolyásoló paraméter alkalmazása a szerkesztett függvényben. A paraméterek kezdőértékének megválasztása a szokásos függvény transzformációs szabályoknak megfelelően történt a következők szerint: A b6= -15, mivel ezt a legnagyobb var2 értékeltérést mutatja az adattáblázat. A b5=6, mert a bemutatott pontgrafikon egy teljes negatív szinuszgörbejelleggel rendelkezik, az-az 6~6,28. A b4=0,05 és b2=0,05 mivel a görbe szükséges vízszintes nyújtásának mértéke az elemi Awrami görbe szokásos határérték (var1=2) tartományának 30-szorosa a táblázat legnagyobb (var1=60) független változó adata miatt, azaz 1/30~0,05. A b3=3 mert az Awrami görbe inflexiós jellegéhez szükséges, hogy b3>2. A b1=2, mert az aszimmetria miatt b1>1. A b0=746, mivel a kezdő var2 értéke 746. Mindezek után megjegyzendő, hogy a nagyszámú (7 db.) alkalmazott transzformációs paraméter valamint az összetett függvényszerkezet miatt a regressziós alkalmazás során nyert paraméterértékek közvetlenül nem értékelhetők. A kapott regressziós görbe részletes vizsgálata viszont, számos értékes folyamatelemzési adatot szolgáltat a fronttevékenység értékeléséhez.

3. Számított eredmények, kiértékelés

3.1. A regressziós eljárással nyert eredmények

Az adatsorra illesztett függvény grafikonját a mérési értékekkel a „Front.STG” ábra mutatja, a regressziós modell paraméterinek értékeit a „Front.SCR” táblázat tartalmazza.



2. ábra. Front.STG

	Model: var2=b6*(sin(b5*(1-exp(-1*(b4*var1)^b3)))/(b2*(var1... (Front) Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: ,674810159 R= ,99955 Variance explained: 99,911%						
N=21	b6	b5	b4	b3	b2	b1	b0
Estimate	-5,26709	6,052954	0,030129	4,674022	0,026316	2,469179	745,9518

2. táblázat. Front.SCR

Az említett táblázatból kiolvasható a kapott korrelációs együttható értéke, ami R=0,99955, egyértelműen jelzi az illesztés pontosságát. A regressziós modell elemzése számos fontos információt szolgáltat. Az alábbiak részletesen mutatják az illesztett függvénnyel nyert alapvető és fontos értékelő időpont (var1) és légnyomás (var2) adatokat a vizsgált folyamatra nézve.

	Időpont: var1(óra)	Légnyomás: var2(Hgmm)	Időtartam: (óra)	Nyomásváltozás: (Hgmm)
A vizsgálati kezdőállapot:	0,00	745,9		
A minimum állapot:	23,40	730,6		
A csökkenési időtartam:			23,40	-15,3
Visszaállás a kezdőállapotra:	31,04	745,9		
A visszaállási időtartam:			7,64	+15,3
A maximum állapot:	35,34	752,0		
A növekedési időtartam:			4,30	+6,1
Teljes növekedési időtartam:			11,94	+21,4
A végső állapot:	60,00	746,3		
A második csökkenési időtartam:			24,57	-5,7
A 745,9 Hgmm alatti időtartam:			31,04	
A 745,9 Hgmm feletti időtartam:			28,96	

3.2. Elemzés, értékelés

A regressziós modell paraméterei, illetve a számított jellemzők alapján az alábbi következtetések vonhatók le a front folyamatra:

1.) A vizsgált időjárási front viszonylag rövid időtartam alatt zajlott le, illetve vonult át a megfigyelési helyen.

2.) Intenzitása a minimális és maximális légnyomásértékek közötti különbség értéke miatt kiemelkedő jellegű.

3.) A két szélső légnyomásérték megjelenése között eltelt rövid idő miatt a front átvonulási sebessége nagynak tekinthető.

4.) A front teljes átvonulása után a légnyomásérték visszaállt tartamosan a kezdeti értékre.

5.) A front átvonulási időtartama alatt jelzett minimális légnyomás lényegesen nagyobb értékkel tért el a kezdeti értéktől, mint a jelzett maximális légnyomás.

6.) A front a mérési értékek regressziós feldolgozásával nyert paraméterek alapján két eltérő jellegű szakaszra bontható.

- Az első szakasz hosszabb, de gyorsabban változó és intenzívebb jellegű.
- A második szakasz rövidebb idejű, de lassabban változó és kedvezőbb jellegű.

4. Összefoglaló

A szélsőséges időjárási anomáliák, egyre gyakoribb erőteljes frontátvonulások vizsgálata fontos tényező a klímakutatásban. A frontok lefolyása, arra alkalmas regressziós modell által követhető. A modell paramétereiből megkaphatjuk a vizsgált folyamat főbb jellemzőit. Az eredmények alapján kimondható, hogy az alkalmazott összetett függvény szigorúan alkalmas időjárási frontok jellegzetes légnyomás változási adatainak regressziós feldolgozására és a folyamat megfelelő értelmezésére.

Irodalomjegyzék

[1] **Csanády, V., Horváth-Szováti, E., Szalay, L**., Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), p.175.

[2] **Csanády, V.,** Időjárás elemzés regressziós eljárás alkalmazásával, Dimenziók, Sopron, Matematikai Közlemények **III.** (2015), 25-34.

A síkbeli projektív transzformáció matematikai modelljei

Závoti József
NyME, KTK, Közgazdasági és Módszertani Intézet
zavoti.jozsef@ktk.nyme.hu

Összefoglaló. Ez a cikk a 2D projektív transzformáció paramétereinek a becslését tárgyalja L_1 normában és az iteráció során újrasúlyozott legkisebb négyzetek módszereivel.A transzformációs egyenletek két sík analitikus egymásra illesztését írják le. Emellett, a projektív transzformáció funkcionális modellt szolgáltat sík területek aerotriangulációs feladatának megoldásához is.

Abstract. This paper deals with the estimation of coefficients of the two dimensional projective transformation using the L_1-norm and the iteratively reweighted least squares methods. The equations of this transformation express the analytical rectification from one plane to another. In addition, the projective transformation can be the functional model solving aerotriangulation problem on flat terrains.

1. Bevezetés

A tér síkra történő leképezése gyakran előforduló feladat (például a számítógépes grafika, vagy a festészet). A fényképezés során a tárgyakhoz, azoknak minden egyes pontjához egyértelműen hozzárendeljük a keletkezett kép bizonyos pontjait. Ezt a megfeleltetést pont-transzformációnak nevezzük. Egyes esetekben a vetített képen a tárgy bizonyos deformációkat szenvedhet, mint például a projektív transzformáció esetében is. A digitális kamerák digitalizált képeit projektív transzformációval köthetjük össze.

2. A 2D projektív transzformáció alapegyenletei

Két sík centrális projekciójának alapösszefüggéseit a jólismert törtlineáris egyenletekkel adhatjuk meg [1] és [3]:

$$X = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{c_1 x + c_2 y + 1}, \qquad Y = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{c_1 x + c_2 y + 1}, \tag{1}$$

ahol $(x, y)^T$ a képpont koordinátái,
$(X, Y)^T$ a tárgypont koordinátái,
$\mathbf{q}^T = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2)^T$ ismeretlen paraméterek.

A nyolc független ismeretlen paraméter meghatározásához legalább négy nem kollineáris pontpárra van szükség. Négynél több adott pontpár esetén kiegyenlítéssel határozhatjuk meg az ismeretleneket. Az ismeretlen paraméterek meghatározása után az (1) egyenletek használhatók tetszőleges, a képkoordináta-rendszerben megadott pontnak a tárgykoordináta-rendszerbe való transzformációjához.

3. Projektív transzformáció paramétereinek becslése L_1- normában

Az (1) egyenletrendszer nevezőjével való átszorzás, és az egyenletek rendezése után a mérési eredményekre az alábbi javítási egyenletek írhatók fel :

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= -a_1 x_i - a_2 y_i - a_3 + c_1 x_i X_i + c_2 y_i X_i + X_i \\ v_{y_i} &= -b_1 x_i - b_2 y_i - b_3 + c_1 x_i Y_i + c_2 y_i Y_i + Y_i \end{aligned} \qquad (2)$$
$$i = 1,2,\ldots,n$$

ahol $n \geq 4$ a mindkét rendszerben adott közös pontok száma.

L_1 - normában az ellentmondásokat a következőképp definiáljuk:

$$\rho_i = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \geq 0\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

Célunk megkeresni az alábbi célfüggvény minimumát:

$$f(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \qquad (4)$$

Helyettesítsük (3) összefüggést az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \leq \rho_i \qquad (5)$$

Az (5) formula megengedi, hogy a transzformált pont vagy a ρ_i sugarú kör belsejében, vagy a kör határán helyezkedjék el.

A (3), (4) és (5) összefüggések egy nemlineáris optimalizálási feladatot definiálnak. Ezt a nemlineáris optimalizálási feladatot a Fuchs [2] által bevezetett módszerrel linearizáljuk.

A $\left(v_{x_i}, v_{y_i}\right)$ ellentmondás vektorokat írjuk fel polár-koordinátákkal:

$$v_{x_i} = \rho_i \cos\tau_i \qquad v_{y_i} = \rho_i \sin\tau_i\,. \qquad (6)$$

Ekkor tetszőleges λ $(0 \leq \lambda \leq 2\pi)$ esetén igazak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} v_{x_i} \cos\lambda &= \rho_i \cos\tau_i \cos\lambda \\ v_{y_i} \sin\lambda &= \rho_i \sin\tau_i \sin\lambda \end{aligned}\,. \qquad (7)$$

A (7) képletben szereplő egyenleteket összeadva kapjuk:

$$v_{x_i} \cos\lambda + v_{y_i} \sin\lambda = \rho_i \cos(\tau_i - \lambda) \leq \rho_i\,, \qquad (8)$$
$$0 \leq \lambda \leq 2\pi\,.$$

A fentiek szerint az (5) összefüggés helyettesíthető végtelen sok $\left(\lambda \in [0,2\pi]\right)$ egyenlőtlenséggel:

$$\begin{aligned} &-a_1 x_i \cos\lambda - a_2 y_i \cos\lambda - a_3 \cos\lambda + c_1 x_i X_i \cos\lambda + c_2 y_i X_i \cos\lambda + X_i \cos\lambda + \\ &-b_1 x_i \sin\lambda - b_2 y_i \sin\lambda - b_3 \sin\lambda + c_1 x_i Y_i \sin\lambda + c_2 y_i Y_i \sin\lambda + Y_i \sin\lambda \quad \leq \quad \rho_i \end{aligned} \qquad (9)$$
$$i = 1,2,\ldots,n\,, \qquad 0 \leq \lambda < 2\pi\,.$$

Válasszunk minden pontra csak véges sok $\lambda_{ij}\ (j=1,2,\ldots,m_i)$ értéket. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a kört egy m_i oldalú poligonnal közelítjük. Ekkor az eredeti nemlineáris optimalizálási feladatunk a következő lineáris programozási feladatba megy át:

$$
\begin{aligned}
&-a_1x_i\cos\lambda_{ij}-b_1x_i\sin\lambda_{ij}-a_2y_i\cos\lambda_{ij}-b_2y_i\sin\lambda_{ij}-a_3\cos\lambda_{ij}-b_3\sin\lambda_{ij}\\
&+c_1\left(x_iX_i\cos\lambda_{ij}+x_iY_i\sin\lambda_{ij}\right)+c_2\left(y_iX_i\cos\lambda_{ij}+y_iY_i\sin\lambda_{ij}\right)-\rho_i\le -X_i\cos\lambda_{ij}-Y_i\sin\lambda_{ij}\\
&\sum\rho_i\to\min\qquad\qquad \rho_i\ge 0\\
&i=1,2,\ldots,n\qquad\qquad j=1,2,\ldots,m_i
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Az előbbi lineáris programozási feladat az eredeti nemlineáris optimalizálási feladatot approximálja. Ha a (10) formulákkal átdefiniált modellt primál lineáris optimalizálási feladatnak tekintjük, akkor a hozzátartozó duál problémát is megadhatjuk, amelynek a megoldása után kapjuk a primál, az eredeti feladat megoldását.

4. A síkbeli projektív transzformáció iterációs becslései

4.1. Hagyományos kiegyenlítési modell

Az (1) formulák közös nevezőjével történő átszorzás, valamint az egyenletek rendezése után kapjuk:

$$
\begin{aligned}
-X&=-a_1x-a_2y-a_3+c_1xX+c_2yX\\
-Y&=-b_1x-b_2y-b_3+c_1xY+c_2yY
\end{aligned}
\tag{11}
$$

A síkbeli projektív transzformáció hagyományos kiegyenlítési modelljében a tárgykoordináták kapják a javításokat. Mátrix formában a javítási egyenletek így adhatók meg:

$$
\begin{pmatrix}
-x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & 0 & x_1X_1 & y_1X_1\\
0 & -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & x_1Y_1 & y_1Y_1\\
-x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & 0 & x_2X_2 & y_2X_2\\
0 & -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & x_2Y_2 & y_2Y_2\\
\vdots & & & & & & & \\
-x_n & 0 & -y_n & 0 & -1 & 0 & x_nX_n & y_nX_n\\
0 & -x_n & 0 & -y_n & 0 & -1 & x_nY_n & y_nY_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\a_2\\b_2\\a_3\\b_3\\c_1\\c_2\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}-X_1\\-Y_1\\-X_2\\-Y_2\\\vdots\\-X_n\\-Y_n\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}v_{x_1}\\v_{y_1}\\v_{x_2}\\v_{y_2}\\\vdots\\v_{x_n}\\v_{y_n}\end{pmatrix}.
\tag{12}
$$

Az $(X_i, Y_i)\ i=1,2,\ldots,n$ pontokhoz rendelt súlyokat jelölje (p_{x_i}, p_{y_i}).

Ekkor a fenti kiegyenlítőszámítási modell normál mátrixa a következőképpen adható meg:

$$
\begin{pmatrix}
\sum p_{x_i}x_i^2 & 0 & \sum p_{x_i}x_iy_i & 0 & \sum p_{x_i}x_i & 0 & -\sum p_{x_i}x_i^2X_i & -\sum p_{x_i}x_iy_iX_i\\
0 & \sum p_{y_i}x_i^2 & 0 & \sum p_{y_i}x_iy_i & 0 & \sum p_{y_i}x_i & -\sum p_{y_i}x_i^2Y_i & -\sum p_{y_i}x_iy_iY_i\\
\sum p_{x_i}x_iy_i & 0 & \sum p_{x_i}y_i^2 & 0 & \sum p_{x_i}y_i & 0 & -\sum p_{x_i}x_iy_iX_i & -\sum p_{x_i}y_i^2X_i\\
0 & \sum p_{y_i}x_iy_i & 0 & \sum p_{y_i}y_i^2 & 0 & \sum p_{y_i}y_i & -\sum p_{y_i}x_iy_iY_i & -\sum p_{y_i}y_i^2Y_i\\
\sum p_{x_i}x_i & 0 & \sum p_{x_i}y_i & 0 & n & 0 & -\sum p_{x_i}X_i & -\sum p_{x_i}y_iX_i\\
0 & \sum p_{y_i}x_i & 0 & \sum p_{y_i}y_i & 0 & n & -\sum p_{y_i}Y_i & -\sum p_{y_i}y_iY_i\\
-\sum p_{x_i}x_i^2X_i & -\sum p_{x_i}x_i^2Y_i & -\sum p_{x_i}x_iy_iX_i & -\sum p_{x_i}x_iy_iY_i & -\sum p_{x_i}x_iX_i & -\sum p_{x_i}x_iY_i & \sum p_{x_i}x_i^2\left(X_i^2+Y_i^2\right) & \sum p_{x_i}x_iy_i\left(X_i^2+Y_i^2\right)\\
-\sum p_{y_i}x_iy_iX_i & -\sum p_{y_i}x_iy_iY_i & -\sum p_{y_i}y_i^2X_i & -\sum p_{y_i}y_i^2Y_i & -\sum p_{y_i}y_iX_i & -\sum p_{y_i}y_iY_i & \sum p_{y_i}x_iy_i\left(X_i^2+Y_i^2\right) & \sum p_{y_i}y_i^2\left(X_i^2+Y_i^2\right)
\end{pmatrix}
\tag{13}
$$

A normál vektor az alábbi alakot veszi fel:

$$\left(-\sum p_{x_i} x_i X_i, -\sum p_{z_i} x_i Y_i, -\sum p_{x_i} y_i X_i, -\sum p_{y_i} y_i Y_i, -\sum p_{x_i} X_i, -\sum p_{y_i} Y_i, -\sum p_{x_i} x_i \left(X_i^2 + Y_i^2\right), -\sum p_{y_i} y_i \left(X_i^2 + Y_i^2\right)\right)^T \qquad (14)$$

Az első lépésben a $p_{x_i} = 1$ és $p_{y_i} = 1$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ súlyokkal elvégzünk egy hagyományos kiegyenlítést, majd választunk egy maximum likelihood típusú becslést és a kapott javítások alapján a választott módszer súlyfüggvénye felhasználásával új súlyok határozhatók meg. Az iterációt addig folytatjuk, amíg a konvergencia egy adott határt elér.

Részletek a [5] szakirodalomban találhatók.

4.2. Percy Tham féle modell

A síkbeli projektív transzformáció *Percy Tham* [7] féle modelljében a képkoordinátákról tételezzük fel, hogy hibákkal terheltek. Legyen

$$s_x = a_1^0 x + a_2^0 y + a_3^0 \qquad s_y = b_1^0 x + b_2^0 y + b_3^0 \qquad \theta = c_1^0 x + c_2^0 y + 1 . \qquad (15)$$

A kezdőértékeket megadhatjuk a hagyományos modell első iterációjából származó értékekkel.

Az $X(a_1,a_2,a_3,c_1,c_2)$ és $Y(b_1,b_2,b_3,c_1,c_2)$ függvények lineárisan közelíthetők a többváltozós függvények *Taylor* sora szerinti sorfejtés alapján:

$$\begin{aligned} X &= \frac{s_x}{\theta} + \frac{x da_1}{\theta} + \frac{y da_2}{\theta} + \frac{da_3}{\theta} - \frac{s_x x dc_1}{\theta^2} - \frac{s_x y dc_2}{\theta^2} \\ Y &= \frac{s_y}{\theta} + \frac{x db_1}{\theta} + \frac{y db_2}{\theta} + \frac{db_3}{\theta} - \frac{s_y x dc_1}{\theta^2} - \frac{s_y y dc_2}{\theta^2} \end{aligned} \qquad (16)$$

A fenti egyenletekből a síkbeli projektív transzformáció *Percy Tham* féle közvetítő egyenleteire a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} s_x - \theta X &= -x da_1 - y da_2 - da_3 + \frac{s_x x}{\theta} dc_1 + \frac{s_x y}{\theta} dc_2 \\ s_y - \theta Y &= -x db_1 - y db_2 - db_3 + \frac{s_y x}{\theta} dc_1 + \frac{s_y y}{\theta} dc_2 \end{aligned} \qquad (17)$$

Általánosan a *Percy Tham* féle modell közvetítő egyenleteinek mátrixa a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & 0 & x_1 \frac{s_x}{\theta} & y_1 \frac{s_x}{\theta} \\ 0 & -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & x_1 \frac{s_y}{\theta} & y_1 \frac{s_y}{\theta} \\ -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & 0 & x_2 \frac{s_x}{\theta} & y_2 \frac{s_x}{\theta} \\ 0 & -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & x_2 \frac{s_y}{\theta} & y_2 \frac{s_y}{\theta} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & -x_n & 0 & -y_n & 0 & -1 & x_n \frac{s_y}{\theta} & x_n \frac{s_y}{\theta} \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} dX_i &= s_x - \theta X_i \\ dY_i &= s_y - \theta Y_i \end{aligned} \qquad (19)$$

Ebben az esetben a normál vektor a következő formában adódik:

$$\left(-\sum x_i dX_i, -\sum x_i dY_i, -\sum y_i dX_i, -\sum y_i dY_i, -\sum dX_i, -\sum dY_i, \sum x_i\left(s_x X_i + s_y Y_i\right), \sum y_i\left(s_x X_i + s_y Y_i\right)\right)^T . \quad (20)$$

A projektív transzformáció *Percy Tham* -féle módszerének robusztus becslési modelljét úgy kapjuk, hogy a (17) közvetítő egyenletekhez súlyokat rendelünk – első lépésben $p_{x_i} = 1;\quad p_{y_i} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$ – és ezen súlyok felhasználásával végezzük el a kiegyenlítést. A további lépésekben a 4.1 alfejezetben ismertetett iteratív becslési algoritmus szerint hajtjuk végre a számításokat.

4.3. Tárczy - Hornoch féle modell

A Tárczy-Hornoch [6] féle modellben a képkoordinátákat tekintjük véletlen hibával terheltnek, és a kiegyenlítés során a képkoordinátákhoz rendelünk a javításokat:

$$X = \frac{a_1(x+v_x)+a_2(y+v_x)+a_3}{c_1(x+v_x)+c_2(y+v_y)+1} \qquad Y = \frac{b_1(x+v_x)+b_2(y+v_x)+b_3}{c_1(x+v_x)+c_2(y+v_y)+1} \quad (21)$$

A keresett ismeretlenekre vezessük be az $a_1^0, a_2^0, a_3^0, b_1^0, b_2^0, b_3^0, c_1^0$ és c_2^0 közelítő értékeket, amelyeket kaphatunk például a hagyományos kiegyenlítésből.

Az $X(a_1,a_2,a_3,c_1,c_2)$ és $Y(b_1,b_2,b_3,c_1,c_2)$ függvények *Taylor* sorfejtésében hanyagoljuk el a másod- és magasabb rendű tagokat, ekkor a (21) összefüggésekből kapott javítási egyenletek a következő alakot veszik fel:

$$s_x - xXc_1^0 + yXc_2^0 - X = \left(Xc_1^0 - a_1^0\right)v_x + \left(Xc_2^0 - a_2^0\right)v_y - xda_1 - yda_2 - da_3 + xXdc_1 + yXdc_2 \quad (22)$$

$$s_y - xYc_1^0 + yYc_2^0 - Y = \left(Yc_1^0 - b_1^0\right)v_x + \left(Yc_2^0 - b_2^0\right)v_y - xdb_1 - ydb_2 - db_3 + xYdc_1 + yYdc_2$$

A fenti egyenleteket valamennyi közös illesztőpontra felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R_1 v_1} + \boldsymbol{A_1 q} &= \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{R_2 v_2} + \boldsymbol{A_2 q} &= \boldsymbol{b_2} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{R_n v_n} + \boldsymbol{A_n q} &= \boldsymbol{b_n} \end{aligned} \quad (23)$$

vagy

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{R_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} \\ \boldsymbol{A_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

ahol $\boldsymbol{q}^T = (a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,c_1,c_2)$ ismeretlen vektor.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b_i} &= \begin{pmatrix} s_{X_i} - x_i X_i c_1^0 + y_i X_i c_2^0 - X_i \\ s_{y_i} - x_i Y_i c_1^0 + y_i Y_i c_2^0 - Y_i \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{R_i} &= \begin{pmatrix} X_i c_1^0 - a_1^0 X_i c_2^0 - a_2^0 \\ Y_i c_1^0 - b_1^0 Y_i c_2^0 - b_2^0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{A_i} &= \begin{pmatrix} -x_i & 0 & -y_i & 0 & -1 & 0 & x_i X_i & y_i X_i \\ 0 & -x_i & 0 & -y_i & 0 & -1 & x_i Y_i & y_i Y_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

A feladat hipermatrixos alakja:

$$\boldsymbol{Rv} + \boldsymbol{Aq} = \boldsymbol{b}\,. \tag{26}$$

Az (x_i, y_i) $(i = 1,2,...,n)$ pontokhoz rendelt súlyokat jelölje (p_{x_i}, p_{y_i}).

Ezen súlyokat az első lépésben egységnyinek választjuk. A további iterációs lépések során a súlyok értékének megállapítása a 4.1 és 4.2 alfejezetben tárgyalt robusztus becslési módszerek adott súlyfüggvényei alapján történik.

A (26) összefüggésben szereplő kiegyenlítőszámítási modell megoldása *Mikhail* [4] alapján:

$$\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{RQR}^{\boldsymbol{T}} \right)^{-1} \boldsymbol{A} \right)^{-1} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{RQR}^{\boldsymbol{T}} \right)^{-1} \boldsymbol{b} \tag{27}$$

ahol $\boldsymbol{Q}$ a p_{x_i} és p_{y_i} súlyok felhasználásával adódó kofactor matrix.

A megoldási algoritmust új súlyok bevezetésével addig ismételjük, amíg az egymás utáni lépésekben számolt javítások az általunk választott stabilitási kritériumnak megfelelnek.

5. Összefoglalás

A tanulmányban a sík projektív transzformációjára adtunk meg matematikai modelleket. Tárgyaltuk a leképezés paramétereinek becslését L_1 normában, amelyben az eredetileg nemlineáris problémát lineáris programozási feladatra vezettük vissza. Levezettük a projektív transzformáció hagyományos modelljének normál egyenletét. A Percy Tham féle modellnek általánosan megadtuk az iteráció során újrasúlyozott legkisebb négyzetek módszerével előállítható megoldását. A Tárczy-Hornoch féle kiegyenlítőszámítási modellt hipermátrixok felhasználásával oldottuk meg. A [8] szakirodalom a projektív transzformáció numerikus megoldására is további támpontokat nyújt.

Irodalomjegyzék:

[1] **Brandstätter G.**: Sitzungsberichte Abt. II, Wien, (1996), 57-109.
[2] **Fuchs H.**: Manuscr. Geod 7, (1982),151-207.
[3] **Gruber O.**: Ferienkurs in Photogrammetrie. Stuttgart, Verlag Konrad Wittwer, (1930).
[4] **Mikhail E. M**.: Observations and Least Squares. New York, Harper & Row, (1976).
[5] **Somogyi J., Závoti J.**: Acta Geod. Geoph. Mont. Hung., (1993),413-420.
[6] **Tárczy-Hornoch A.**: Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilungan der kgl. ung. P.J. Uni. Band XIII, (1941).
[7] **Tham P.**: Photogrammetrische Auswertung ebenerge Gelände. Stockholm, Centraltryckeriet Esselte Aktiebolag, (1939).
[8] **Somogyi J., Závoti J.**: Acta Geod. Geoph. Hung., (1998), 279-288.

Többváltozós lineáris regresszió a gyakorlatban

Pödör Zoltán
NymE Simonyi Károly Műszaki, Faanyagtudományi és Művészeti Kar,
Informatikai és Gazdasági Intézet
podor@inf.nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Cikkünkben bemutatjuk a többváltozós lineáris regresszió gyakorlati alkalmazásának nehézségeit az eredmények felhasználhatósága szempontjából. A matematikai-statisztikai alapú eljárások által generált ideális modellek sokszor nem felelnek meg teljesen a vizsgált adatokat adó szakterület elvárásainak.

ABSTRACT. In this paper we introduce the difficulties of the practical application of the multivariable linear regression in terms of the result's usability. The mathematical-statistical based optimum models do not answer exactly the expectations of the examined data's area.

1. Bevezetés

A különböző mérési adatok közötti kapcsolatkeresés az adatfeldolgozás fontos feladata. Számtalan statisztikai módszer ismert ennek vizsgálatára az egyszerű kétváltozós lineáris kapcsolat elemzéstől a többváltozós nemlineáris kapcsolatkeresésen keresztül a már inkább az adatbányászat területére kimutató mesterséges neurális hálókig bezárólag. Azonban fontos azt is látni, hogy módszertani értelemben egyre bonyolultabb és számításigényesebb feladatokról van szó.

Jelen munkában a többváltozós lineáris regresszió gyakorlati alkalmazásával, alkalmazhatóságának különböző aspektusaival foglalkozunk. Kitérünk a módszertan előnyeire és a gyakorlatban tapasztalható hátrányaira is. Erdészeti jellegű adatok és alapvető meteorológiai paraméterek között végzett összefüggés vizsgálatokon keresztül mutatjuk be a módszertan felhasználásával kapcsolatos gyakorlati tapasztalatokat és nehézségeket.

Különösen a kapott eredmények értelmezésével, értelmezhetőségével kapcsolatosan felmerülő kérdésekre és problémákra fókuszálunk, mint például mennyire összeegyeztethető a matematikai értelemben legjobb modell az adott szakterület számára jó és elfogadható modellel. Mennyire lehet a különböző (ám azonos alapú) adatsorokra kapott eredményeket egységesen kezelni, a kapott összefüggéseket összehasonlítani.

A dolgozatban részletesen is bemutatjuk az alkalmazott módszertant, hiszen ennek ismerete fontos a fenti kérdések vizsgálatának szempontjából.

2. Alkalmazott módszertan, felhasznált adatok

A fejezetben bemutatjuk a többváltozós lineáris regresszió elméleti hátterét és a felhasznált erdészeti jellegű adatokat. Ez a regressziós módszer alkalmas többek között a

diszkrét adatsorok folytonossá tételére, adathiányok, kiugró adatok kezelésére, zajszűrésre és természetesen jövőbeni értékek előrejelzésére is a független paraméterek megfelelő rendelkezésre állása esetén.

2.1. Többváltozós lineáris regresszió

A regresszió számítás [3] lehetővé teszi, hogy lineáris kapcsolatot állítsunk fel egy függő és több független változó között, felépítve rájuk egy lineáris modellt (1).

$$y = b + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \tag{1}$$

ahol y a függő, $x_1, x_2, \dots, x_n$ a független változók, $b, a_1, a_2, \dots, a_n$ pedig a regressziós együtthatók.

A modellbe bevont független változók számának növelésével a modellt jellemző determinációs együttható (R^2) értéke minden egyes lépésben biztosan nem romlik, általában javul is valamennyit. Ez azt a tévképzetet keltheti bennünk, hogy a legjobb modell a legtöbb változó bevonásával érhető el. Ezzel szemben az optimális modell előállításához meg kell határoznunk azon változók minimális körét, melyek érdemi, statisztikailag is mérhető hatást fejtenek ki a függő változóra és egy-egy újabb változó bevonásával szignifikánsan javítjuk a modellt.

Ezért olyan megoldásra kell törekedni, mely során a modellbe csak a minimális számú, 0-tól szignifikánsan eltérő együtthatójú, egymással minél kevésbé összefüggő magyarázó változó kerüljön bevonásra, mégpedig úgy, hogy a kapott modell még megfelelő biztonsággal írja le a vizsgált folyamatot. Összegezve, a modellépítés során optimális egyensúlyra törekszünk a gazdaságosság és a jó közelítés között.

A feladat megoldására különböző technikák léteznek, az egyik ismert és elterjedt módszertant a lépésenkénti regressziós technikák jelentik. A lépésenkénti regressziós technikáknak [1] alapvetően három típusát szokták megkülönböztetni:

- forward selection,
- backward elimination,
- stepwise regression.

A módszerek mindegyikének alapötlete, hogy egyesével vizsgáljuk a lehetséges változókat és egyenként döntjük el, hogy az adott változóra szükség van-e az épülő modellben. Annak eldöntésére, hogy egy változó beépítése a modellbe szignifikáns javulást hoz-e az eggyel korábbi állapothoz képest, F-próbát használunk (2). Annak vizsgálatára, hogy egy beépítendő változó együtthatója a modellben szignifikánsan eltér-e 0-tól t-próbát alkalmazhatunk.

$$F = \frac{\left(r^2_{y.1,2,\dots,p} - r^2_{y.1,2,\dots,p-1}\right)}{\frac{1-r^2_{y.1,2,\dots,p}}{n-p-1}} \tag{2}$$

A három, említett módszer esetében a megközelítés irányában van különbség. A *forward selection* során egyesével vesszük a lehetséges magyarázó változókat, és döntjük el, hogy beépítésre kerüljön-e vagy sem. Így a modell kezdetben egyetlen független változót sem tartalmaz, majd minden egyes iterációban egy-egy elemmel bővülhet ez a halmaz, bevonva azt a változót, mely a legerősebb kapcsolatot mutatja a függő változóval. A *backward selection* ennek éppen az ellentettje. A kezdő lépésben minden lehetséges független változót bevonunk a modellbe, majd az egyes iterációs lépésekben egyesével hagyjuk el azokat a változókat, melyek a legkevésbé gyakorolnak hatást a függő változóra. *Stepwise* módszer pedig a fenti két eljárás ötvözete. Egy-egy iterációs lépésben bevonunk egy új változót, mely szignifikáns javulást okoz a modellben, majd vizsgáljuk, hogy a már bevont változók közül el tudunk-e hagyni úgy, hogy az ne okozzon statisztikailag mérhető romlást a modell jóságát tekintve.

Az illesztés, modellezés során az illeszkedés jóságának mérésére leggyakrabban használt mutató az R^2 determinációs együttható. Az R^2 mellett olyan mutatók alkalmazása is célszerű, amelyek figyelembe veszik a becslés során a bevont változók számát is, és ezáltal a kevés számú paramétert tartalmazó modelleket – még ha kevésbé tűnnek is pontosnak, mint a több paramétert tartalmazó társaik – versenyképessé teszik a több változót, illetve paramétert tartalmazó modellekkel. A legegyszerűbb ilyen mutató a Theil-féle, szabadságfokkal korrigált determinációs együttható (3), ahol n az összes lehetséges paraméterek, p pedig a modellbe bevont paraméterek számát jelöli.

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1 - R^2) \qquad (3)$$

2.2. Felhasznált adatok

Néhány magyarországi, adott helyről származó erdészeti jellegű adatsorokat vizsgáltunk, mint függő paramétereket, illetve az ezekhez köthető helyi mérésű meteorológiai adatsorokat, mint függő paramétereket. A függő paraméterek éves bontásúak és 1994-2010 vonatkozásában állnak rendelkezésre. A meteorológiai adatok pedig helyi mérésekből származó, havi bontású átlaghőmérséklet és csapadékösszeg adatok. A gyakorlati felhasználhatóság szempontjából fontos hangsúlyozni, hogy ez az a két paraméter, ami gyakorlatilag az ország bármely pontjára, tetszőleges időszakra elérhető és használható.

Az alap meteorológiai adatok mellett a CReMIT [2] módszer alkalmazásával speciális, időszaki adatokat is képeztünk előző év januárjától adott októberéig, legfeljebb 6 hónapnyi szélességű időablakok alkalmazásával. Ez lehetővé teszi a különböző időszakok és az előző év meteorológiai hatásainak figyelembe vételét is a szimpla havi adatok mellett.

3. Eredmények

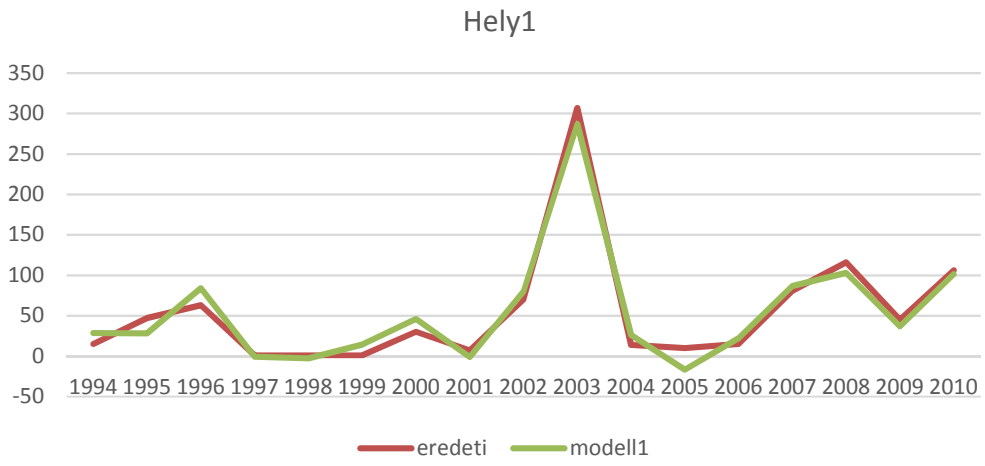
Az eredmények kapcsán bemutatunk több illesztési eredményt, a hozzájuk tartozó modelleket. Ugyanazon jellegű erdészeti adatsorra több helyen is elvégeztük az illesztést. Megvizsgáltuk a modelleket több szempontból is: mennyire hasonlíthatóak össze egymással a különböző földrajzi területen, de azonos adatsorokra kapott modellek, mennyire hangolható össze a matematikai értelemben legjobb modell a szakmai szempontokkal. Készíthető-e univerzálisan jó modell több, hasonló adatsorra, van-e ennek létjogosultsága egyáltalán?

Négy adatsorra mutatjuk be az eredményeket. Ahogy majd látni fogjuk ezek közül 3 elég hasonló karakterisztikát mutat, egy pedig jelentősen eltér már az alapadatok tekintetében is. A három homogén adatsor esetében 2003-ben tapasztalható egyöntetűen egy kiugró adat, ez a negyedik adatsor esetében egyáltalán nem mutatható ki, így itt eleve nem is várnánk feltétlenül a másik háromhoz hasonló eredményeket.

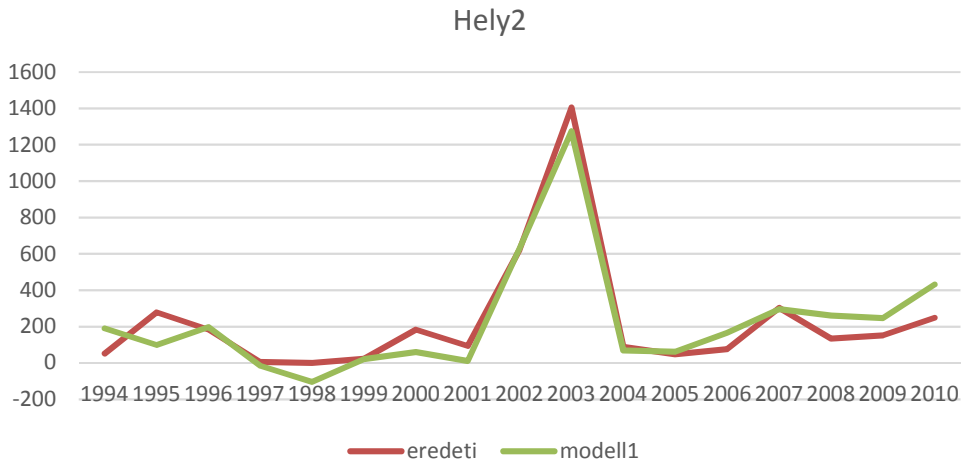
A vizsgálatokat az ingyenes R szoftverrel [4] végeztük, illetve a regressziós modell megvalósítása saját fejlesztés alapján történt, hogy olyan részletinformációk is megjelenhessenek a folyamat során, amit egyéb szoftverekben nem, vagy csak nehezen lehet elérni. Így a kimenetben teljesen nyomon követhető a modellépítés folyamata, az egymás után bevonásra kerülő változók, az aktuális modell együtthatói és a korrigált determinációs együttható értékei. A modellek vizsgálata 90%-os szignifikancia szinten történt, ez definiálta egyúttal azt is, hogy melyik lépésben áll le a modellépítés folyamata.

Az alábbiakban, az 1.-4. ábrák mutatják az eredeti függő paraméterek adatait és az illesztette, többváltozós regressziós modell által generált adatokat. Az x-tengelyen az évek, az y-tengelyen pedig a vizsgált erdészeti adatok értékei látszódnak. Jól érzékelhető, hogy az első három esetben az illeszkedés meglehetősen jó, míg a negyedik esetben elég gyenge. Ezt a

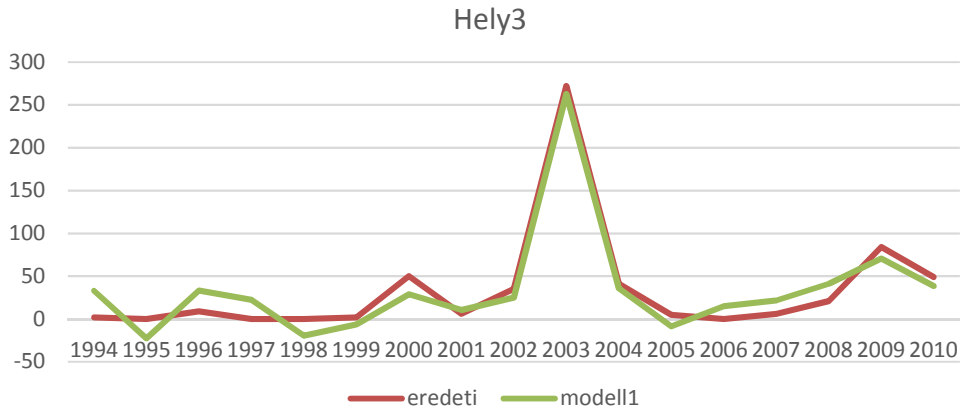
kapott korrigált determinációs együtthatók is megerősítették, azonban ennek részletezésére most nem térünk ki.



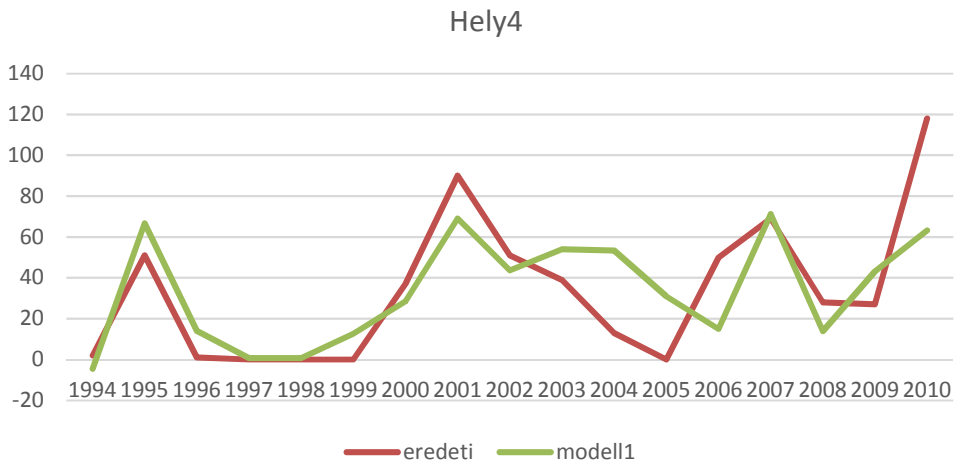
1. ábra. Első helyszín, eredmények



2. ábra. Második helyszín, eredmények



3. ábra. Harmadik helyszín, eredmények



4. ábra. Negyedik helyszín, eredmények

Az egyes helyekhez az alábbi többváltozós regressziós modellek álltak elő:

	Modellbe bevont paraméterek listája								
	paraméter1	***paraméter2***	***paraméter3***	***paraméter4***	***paraméter5***	***paraméter6***	***paraméter7***	***paraméter8***	***paraméter9***
modell1	Temp_a5_a7	Temp_a1_a6	Temp_p8_p8	Prec_p12_a6	Prec_p3_p3	Temp_p5_p6	Prec_p9_p11	Prec_p7_a1	Prec_p3_p4
modell2	Temp_a5_a8	Temp_a1_a5	Temp_p6_p7	Prec_a4_a5	Prec_a2_a3	Temp_p11_p11	Prec_p3_p3	Temp_a7_a7	Prec_a9_a10
modell3	Temp_a5_a8	Temp_a1_a6	Temp_p6_p6	Prec_p6_p7	Temp_p8_p8	Prec_p4_p4	Temp_a3_a3	Prec_a5_a7	Prec_p4_p8
modell4	Temp_p7_p11	Temp_p4_p5	Temp_p6_p6	Prec_p7_p8	Prec_a2_a2	Prec_a6_a6	Prec_p8_a1	Prec_p3_p7	Temp_a7_a7

1. táblázat. A négy helyszín modelljeinek paraméterlistája

Az 1. táblázatban látható a négy vizsgált terület modellje, amely tartalmazza a modellbe bevont paraméterek neveit, melyeket az alábbi módon értelmezünk: *Temp*, illetve *Prec* előtag utal arra, hogy hőmérséklet vagy csapadék adatról van-e szó. Az ezt követő két érték a vizsgált ablak kezdete és vége hónapban megadva, ahol *a* az aktuális, *p* az előző évre utal. Így például *Temp_p9_a2* az előző év szeptemberétől adott év februárjáig tartó időszak átlaghőmérséklete. Most csak ezeket az értékeket jelenítjük meg, eltekintünk a modellek részletesebb adatainak (együtthatók, determinációs együttható) megjelenítése.

A táblázatban megjelenő, bevont paraméterek sorrendje egyúttal a modellbe való bekerülés sorrendjét is tükrözi. Figyelembe véve, hogy az első három vizsgált alap adatsor meglehetősen homogén az eredmények tekintetében is egységes képet várnánk. A hasonlóságot itt most az egyszerűség kedvéért a bevont paraméterek előfordulásával és bekerülési sorrendjével értelmezzük. Ugyan felfedezhetőek hasonlóságok az első 3 modellben, különösen az első három bevont paraméter tekintetében, de az azt követő elemek már meglehetősen vegyes képet mutatnak mind a bevonás sorrendjének, mind az előfordulásnak a tekintetében. Ennek oka vélhetően abban keresendő, hogy a modellezés pusztán matematikai megközelítést használ, azaz egy adott lépésben azt az elemet vonja be az épülő modellbe, ami lokálisan a legjobb javulást hozza statisztikai értelemben. Ugyanakkor elképzelhető, hogy statisztikailag egy kicsit gyengébb javulást hozó paraméter bevonásával egy adott lépésben homogénebb és/vagy szakmai értelemben jobb modellsereg lenne létrehozható. Azonban esetleges szakmai szempontok figyelembe vételét a matematikai megközelítés ebben a formában nem teszi lehetővé.

A negyedik adatsor karakterisztikájában is eltér az előző háromtól, így a kapott modell is teljesen más elemeket tartalmaz, nem vagy nehezen hasonlítható össze az előző modellekkel.

Felmerülhet itt is a kérdés, hogy ha nem pusztán matematikai oldalról közelítjük a kérdést kialakítható-e egy kicsit gyengébb, de a másik háromhoz jobban hasonlító modell.

A nem pusztán matematikai, statisztikai szempontok figyelembe vételének fontosságát támasztja alá az is, hogy specifikus, szakmai feladatok esetében sok esetben jobban értelmezhető egy matematikai értelemben gyengébb, de szakmailag jobban magyarázható modell.

4. Összefoglaló

A változók közötti kapcsolatkeresés az adatelemzés egy fontos feladata. Ennek egyik, a statisztikából jól ismert módszere a regresszió, illetve annak egy speciális változata a többváltozós lineáris regresszió. Erdészeti jellegű példákon keresztül felhívtuk a figyelmet a pusztán matematikai alapokon nyugvó modellalkotás lehetséges kérdéseire, problémáira elsősorban az adatokat szolgáltató szakterület szempontjából. Biztos-e, hogy a matematikailag legjobb modell szakmailag is a legjobb? Összehasonlíthatóak-e azonos jellegű adatsorokra kapott egyedi modellek? Várhatunk-e azonos, hasonló eredményeket ilyen adatsorokra?

A bemutatott példák kapcsán azt a tapasztalatot fogalmazhatjuk meg, hogy a matematikai alapokon nyugvó modellek nem biztos, hogy szakmai értelemben is a legjobbak. Sok esetben előfordulhat, hogy egy statisztikai értelemben gyengébb modell szakmailag sokkal jobban magyarázható adott szakterületen, mint a matematikailag legerősebb. Ugyanakkor a szakmai szempontok bevonása közvetlen módon az ilyen jellegű modellezésben nehéz, ha egyáltalán lehetséges.

Ez megnehezíti az egységes modellek kialakítását is. Feltételezhető, hogy univerzálisan jó modell általában nem feltétlenül alakítható ki még ugyanolyan jellegű adatsorok esetében sem, így lokális optimumokra tudunk törekedni matematikai oldalról.

Irodalomjegyzék

[1] **Montgomery, D. C., Peck, A. E., Vining, G. G**., Introduction to linear regression analysis (fifth edition). Published by John Wiley & Sons, (2012), p. 672.
[2] **Pödör, Z., Edelényi, M., Jereb, L**., Systematic Analysis of Time Series – CReMIT. Infocommunication Journal, VI(1) (2014), 16-22.
[3] **Spiegel, M. R.**, Statisztika, Elmélet és gyakorlat, PANEM-McGraw-Hill, Budapest, (1995), p. 546.
[4] https://www.r-project.org/**,** utolsó megtekintés 2016.10.28.

Lehűlési folyamat vizsgálata középiskolai módszerekkel

Barta Edit
NymE EMK Matematikai Intézet
barta.edit@nyme.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Egy konkrét példán keresztül szeretném bemutatni, hogy a lehűlési és azzal analóg folyamatok hogyan tárgyalhatók középiskolai matematikai módszerekkel, és az eredmény hogyan egyeztethető össze a differenciálegyenlettel való megoldás eredményével.

ABSTRACT. I wish to present a possible treatment of cooling-, and analogous processes using only basic mathematical techniques for solving a proper example. I compare the result to the solution gained by a differential equation.

1. Bevezetés

A középiskolai fizika oktatása során jó néhány példa található arra, hogy a tárgyalt jelenség analitikai megközelítését olyan problémák teszik lehetetlenné, hogy a diák nincs birtokában azoknak a matematikai ismereteknek, amelyek az adott probléma megoldását egzaktul szolgáltatnák. Egyik ilyen jelenségcsoport a lehűlési folyamatok és az azzal analóg jelenségek, mint például a radioaktív bomlás, vagy az egyenáramú áramköröknél az áram megszakításakor lejátszódó tranziens jelenségek. De ezekhez hasonlóan tárgyalhatók a telítődési jellegű folyamatok, mint például az adott külső hőmérsékletre történő felmelegedés vagy az áram bekapcsolásakor lejátszódó tranziens folyamatok. A közös bennük az, hogy hasonló alakú differenciálegyenlet írható fel mindegyik folyamatra, amelynek a megoldása egyszerű, ámde a differenciál- és integrálszámítást nem tanuló középiskolásnak nem tálalható. Néhány esetben viszont – amikor a feladat számadatai „szépek” – az egzakt megoldást szolgáltató függvény egészen jól közelíthető csak középiskolás matematikai eszközöket felhasználva. Ennek bemutatására alkalmas az alábbi feladat, amely évekkel ezelőtt a Nyugat-magyarországi Egyetemen oktatott Matematika II. tantárgy differenciálegyenletek témakörének bevezető példája volt [1]. Ezt a feladatot éppen „szép” számadatai és viszonylag egyszerű, ámde ötletet kívánó megoldása miatt kitűztük a 2016-os Vermes Miklós Nemzetközi Fizikaverseny Hőtan kategóriájában is [2].

2. A konkrét feladat

„A kemencéből kiszedett kenyér hőmérséklete 120 °C, 30 perccel később 60 °C. Mikor lesz a kenyér hőmérséklete 40 °C, ha az időben állandó külső hőmérséklet 30 °C? A megoldáshoz alkalmazza a Newton-féle lehűlési törvényt, mely szerint egy test hőmérsékletváltozásának a sebessége arányos a test és a környezete közötti hőmérsékletkülönbséggel.”

3. Megoldások

Három megoldást fogok ismertetni, amelyekből az első az egzakt hőmérséklet-idő függvényt szolgáltató differenciálegyenletes megoldás, a másik kettő pedig a középiskolásoknak is bemutatható eljárás. Mindhárom megoldás során használjuk a következő jelöléseket:

T, $T(t)$: a kenyér pillanatnyi hőmérséklete,
T_0 : a kenyér kezdeti hőmérséklete (T_0 = 120 °C),
T_k : a külső hőmérséklet (T_k = 30 °C),
t_m : a későbbi mérésig eltelt idő (t_m = 30 perc),
T_m : a t_m időpontban mért hőmérséklet (T_m = 60 °C).

1. Megoldás

A Newton-féle lehűlési törvény differenciális alakja:

$$\frac{dT}{dt} = \propto (T - T_k).$$

Ez egy szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenlet, melynek a kezdeti feltételeket is figyelembe vevő megoldása:

$$T(t) = (T_0 - T_k)e^{\propto t} + T_k,$$

ahol α 1/idő dimenziójú mennyiség, a későbbi időpontban mért eredményekből meghatározandó állandó. Behelyettesítve a mért adatokat a megoldásba:

$$T_m = (T_0 - T_k)e^{\propto t_m} + T_k,$$

$$\propto = ln\left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{1}{t_m}}$$

kifejezést kapjuk α-ra. Ezt visszahelyettesítve a megoldásba és az átalakításokat elvégezve a következő exponenciális függvényt kapjuk a kenyér pillanatnyi hőmérsékletére:

$$T(t) = (T_0 - T_k)\left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{t}{t_m}} + T_k. \qquad (1)$$

Általában α-t vagy kiszámolják szám szerint, és beírják e kitevőjébe, vagy kísérletekből meghatározandó paraméterként tüntetik fel, de a hőmérséklet-idő függvényt mindenképpen e alapú exponenciális függvényként írják fel. Most azért célszerű mégis paraméteresen visszahelyettesítenünk az e alapú függvénybe és egyszerűsítenünk, hogy az így kapott megoldást össze tudjuk hasonlítani a középiskolás megoldás eredményével.

Megjegyezzük, hogy a radioaktív bomlástörvényt is két alakban szokták megadni, az egyik ($N = N_0 e^{-\lambda t}$) e, a másik ($N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$) 2 alapú exponenciális függvény. A λ bomlási állandó és a T felezési idő között analóg kapcsolat áll fenn, mint esetünkben az α és a t_m között.

2. Megoldás

A lehűlési törvény értelmében

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \sim T - T_k.$$

Célszerűen Δt-t válasszuk 1 percnek, ez „elég kicsi”. Így a lehűlési törvény alakja:

$$\Delta T = c(T - T_k),$$

ahol ΔT az 1 percre jutó hőmérsékletcsökkenés, c a mért eredményekből meghatározandó arányossági tényező.

Jelölje ΔT_0 a [0;1], ΔT_1 az [1;2], ΔT_2 a [2;3], …, ΔT_{n-1} az [n-1;n], … perc időintervallumban bekövetkező hőmérsékletcsökkenést (pozitív előjellel!), T_0, T_1, T_2, … T_n … pedig a kenyér hőmérsékletét a t = 0, 1, 2, … n, … perc időpillanatokban. A megoldást T_n fogja szolgáltatni.

A hőmérsékletcsökkenésekre felírható:

$$\Delta T_0 = c(T_0 - T_k) = cT_0 - cT_k,$$
$$\Delta T_1 = c(T_1 - T_k) = cT_1 - cT_k,$$
$$\Delta T_2 = c(T_2 - T_k) = cT_2 - cT_k,$$
$$\vdots$$
$$\Delta T_{n-1} = c(T_{n-1} - T_k) = cT_{n-1} - cT_k,$$
$$\vdots$$

A hőmérsékletekre felírható:

$$T_1 = T_0 - \Delta T_0 = T_0 - cT_0 + cT_k = T_0(1 - c) + cT_k,$$
$$T_2 = T_1(1 - c) + cT_k,$$
$$T_3 = T_2(1 - c) + cT_k,$$
$$\vdots$$
$$T_n = T_{n-1}(1 - c) + cT_k,$$
$$\vdots$$

Ily módon az egész percekben mérhető hőmérsékletekre egy rekurzív módon megadott sorozatot írtunk fel. Ennek általános tagja a behelyettesítéseket és megfelelő kiemeléseket végrehajtva a következő alakban írható fel:

$$T_n = T_0(1 - c)^n + cT_k[(1 - c)^{n-1} + (1 - c)^{n-2} + \cdots + (1 - c) + 1].$$

A szögletes zárójelben levő összeg egy olyan mértani sorozat első n tagjának az összege, amelynek első tagja 1, kvóciense (1-c). Zárt formában felírva az összeget:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \frac{(1 - c)^n - 1}{1 - c - 1} = \frac{1 - (1 - c)^n}{c}.$$

Ezt behelyettesítve T_n-be és az átalakításokat elvégezve kapjuk:

$$T_n = (T_0 - T_k)(1 - c)^n + T_k.$$

A c paramétert illetve az 1-c mennyiséget a 30. perc végén mért hőmérsékletből határozhatjuk meg.

$$T_m = (T_0 - T_k)(1 - c)^m + T_k$$
$$1 - c = \left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Visszahelyettesítve a következő megoldást kapjuk:

$$T_n = (T_0 - T_k)\left(\frac{T_m - T_k}{T_0 - T_k}\right)^{\frac{n}{m}} + T_k. \qquad (2)$$

Megoldásunk tehát egy számsorozat, méghozzá egy mértani sorozat, amelynek tagjai az egész percekben mérhető hőmérsékletet adják meg.

Hasonlítsuk össze (1)-gyel, azaz a differenciálegyenlettel kapott megoldással! Látható, hogy a két megoldás teljesen hasonló, mindössze annyi a különbség, hogy míg (1) folytonos függvény, amelynek értelmezési tartománya a nem negatív valós számok, addig (2) egy olyan diszkrét függvény, amelynek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza. Az egész percnyi időpillanatokban a két függvény azonos értékeket vesz fel. De ennél több is teljesül: ha az időt továbbra is percekben számoljuk, akkor tetszőleges, nem feltétlenül egész percet is behelyettesíthetünk (2)-be, a kapott hőmérsékleti érték pontos lesz! Egyetlen átírással (*n* helyett *t*) folytonossá tehetjük a sorozatunkat, és megkapjuk az egzakt megoldást.

A konkrét feladat megoldása adatainkkal:

$$T_n = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{30}} + 30,$$

illetve

$$T(t) = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} + 30$$

A feladat kérdése, hogy mely *n*-re lesz T_n = 40 °C.

$$40 = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{30}} + 30$$

Az exponenciális egyenletet megoldva *n* = 60 adódik, tehát 60 perc múlva lesz a kenyér hőmérséklete 40 °C.

3. Megoldás

Van az előzőnél egyszerűbb megoldás is, amely azon az ötleten alapul, hogy a hőmérsékleti skála nullpontját eltoljuk +30 °C-ba. Ezt megtehetjük, hiszen mind a hőmérséklet*változás*, mind pedig a hőmérséklet*különbség* független attól, hogy a hőmérsékleti skálán hol helyezkedik el a nullpont. A kiinduló adatok és a feladat kérdése a következőképpen módosul: T_0 = 90 °C, T_{30} = 30 °C, T_k = 0 °C. Mikor lesz a kenyér hőmérséklete 10 °C?

A lehűlési törvényalakja:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \sim T.$$

Δ*t*-t most is 1 percnek választjuk, így

$$\Delta T = cT.$$

Az (*n*-1)-edik hőmérsékletváltozás:

$$\Delta T_{n-1} = cT_{n-1},$$

a hőmérsékletek:

$$T_1 = T_0 - \Delta T_0 = T_0 - cT_0 = T_0(1-c)$$
$$T_2 = T_1 - \Delta T_1 = T_1 - cT_1 = T_1(1-c) = T_0(1-c)^2$$
$$\vdots$$
$$T_n = T_0(1-c)^n$$
$$\vdots$$

A mért értéket behelyettesítve:

$$1 - c = \left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{\frac{1}{m}},$$

a keresett függvény:

$$T_n = T_0\left(\frac{T_m}{T_0}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

A módosított adatok behelyettesítését és a végeredmény számszerű kiszámolását az olvasóra bízom.

Látható, hogy ez utóbbi megoldás sokkal egyszerűbb az előzőnél, hátránya, hogy nem minden esetben alkalmazható.

4. Összefoglaló

Írásomban két lehetséges módszert ismertettem az exponenciális lecsengésű folyamatok középiskolai matematikai eszközökkel való tárgyalására. A konkrét feladatot a verseny résztvevői közül senki nem az általam megadott megoldások valamelyikével dolgozta ki. Éppen a feladat „szép” számadatai tették lehetővé a feladat végeredményének megsejtését: „ha 30 perc alatt a kezdeti hőmérséklet a külsőhöz képest kétharmadára esik vissza, akkor innen további kétharmadára is feltételezhetően ugyanannyi idő alatt esik vissza.” Ezen megsejtéshez alkotott a diákok egy része képletet, levezetést, és kapott helyes eredményt. Egy versenyző próbálkozott differenciálegyenlettel (ő birtokában volt ennek az ismeretnek), egy pedig megsejtette, hogy az ilyen jellegű folyamat „valami exponenciális függvénnyel írható le”, és ezen gondolat alapján oldotta meg a feladatot helyesen. Tanulság: a túlságosan szép számadatok néha megfosztják a tanárt attól a lehetőségtől, hogy megmutassa az általánosabb, szélesebb körben is alkalmazható megoldást.

Irodalomjegyzék

[1] **Horváth, J.,** Matematika II., Egyetemi jegyzet, Soproni Egyetem, EMK, Matematikai Intézet, Sopron, (1998), p. 42.
[2] **Hőtan kategória feladatlapja,** Vermes Miklós Fizikaverseny, 2016.